

I. Angle au collège

A. Somme des angles d'un triangle par pliage

Un enseignant propose l'activité présentée dans l'annexe 1.1 pour introduire la propriété de la somme des angles d'un triangle.

1. Quel peut-être un intérêt didactique à proposer ce type d'activité aux élèves ?
2.
 - a. Rédiger une démonstration de la propriété, qui s'appuie sur l'activité.
On pourra utiliser les éléments suivants :
 - (d') la médiatrice du segment $[CH]$ et M le milieu de $[CH]$;
 - (d'') la médiatrice du segment $[BH]$ et N le milieu de $[BH]$;
 - I l'intersection des droites (d') et (AC) , et J l'intersection des droites (d'') et (AB) .
 - b. Proposer une autre démonstration de cette propriété en se référant à l'annexe 1.2.
3. Proposer un énoncé d'exercice de construction d'un triangle, qui amène les élèves à utiliser la propriété de la somme des angles d'un triangle.

B. Figure codée

Un enseignant propose à une classe de quatrième l'exercice figurant en annexe 1.3.

4. En s'appuyant sur l'annexe 0, expliquer en quoi les compétences « raisonner » et « communiquer » citées dans l'annexe 1.3, sont mobilisées dans cet exercice.
5. Analyser en termes d'erreurs et de réussites la production de l'élève figurant en annexe 1.4.
6. Énoncer trois propriétés mathématiques requises pour effectuer l'exercice.

C. Circonférence terrestre par la méthode d'Eratosthène

Un enseignant propose à une classe de troisième l'exercice figurant en annexe 1.5.

7. Pour permettre de traiter la question a. de l'exercice, qu'a-t-on implicitement admis dans la modélisation proposée ?
8. Pour chacune des questions a), b) et c) de cet exercice, identifier un prérequis nécessaire.
9. En s'appuyant sur l'annexe 1.6, proposer 3 questions flashs qui pourraient être données en amont et qui permettraient de réactiver les prérequis précédemment cités.

II. Angle au lycée

A. Fonctions trigonométriques

En annexe 1.7 sont proposés deux extraits de manuels.

10. Expliquer pourquoi, pour un angle compris entre l'angle nul et l'angle droit, les définitions du cosinus données dans ces manuels au collège et au lycée sont cohérentes entre elles.
11. Donner une définition de la tangente d'un nombre réel en précisant le domaine de définition.

B. Calcul d'une valeur remarquable

Un enseignant propose à des élèves de première suivant l'enseignement de spécialité, l'exercice figurant en annexe 1.8.

12. Donner une démonstration de la détermination de la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ telle qu'elle pourrait figurer dans un cahier d'élève.
13. Proposer une correction de la question 1.

C. Formule d'Al-Kashi

La formule d'Al-Kashi est rappelée en question 4 de l'annexe 1.10.

14. Sur l'annexe 1.9 figure un verbatim d'une ouverture de séance en classe de première.
 - a. Pourquoi la figure présentée par l'enseignant permet-elle à l'élève de répondre à la dernière question posée ?
 - b. En quoi ces échanges légitiment-ils l'introduction de la formule d'Al-Kashi ?
15. Montrer que la formule d'Al Kashi est une généralisation du théorème de Pythagore.
16. En annexe 1.10 est proposé un exercice visant à démontrer la formule d'Al-Kashi.
 - a. Donner deux prérequis nécessaires à la résolution de l'exercice ?
 - b. Proposer une démonstration dans le cas où l'angle $\widehat{ABC}$ est obtus.
17. Proposer une démonstration de la formule d'Al-Kashi à l'aide du produit scalaire.

D. Optimisation

Un enseignant propose à des élèves de terminale suivant l'enseignement de spécialité mathématiques l'exercice de l'annexe 1.11.

Une production d'élève figure en annexe 1.12.

18. Comment amener l'élève à constater que la formule « $V = \pi A$ » est erronée.
19. En s'appuyant sur l'annexe 0, donner trois éléments dans la production de l'élève attestant de la mobilisation de la compétence « Chercher ».
20. Quelle aide peut-on proposer à un élève qui ne parvient pas à s'engager dans la résolution de l'exercice ?
21. Rédiger une correction de cet exercice telle qu'elle pourrait figurer dans un cahier d'élève.
22. Proposer deux fonctions différentes (dont l'une n'utilise pas de fonction trigonométrique), selon la variable choisie, permettant d'exprimer le volume du cylindre.

A. Des patterns

1. L'annexe 2.1 définit la notion de pattern et distingue deux types de patterns. Parmi les patterns présentés dans l'annexe 2.2, en donner un de type répétitif et un de type évolutif.
2. Pour chaque pattern présenté dans l'annexe 2.2, un enseignant pose la question suivante : « Quel serait l'élément au rang suivant ? ». Proposer deux réponses différentes dans le cas du pattern n° 1 ?

Un enseignant propose l'activité présentée en annexe 2.3 à une classe de quatrième.

3. Selon l'annexe 2.4, à quel type de tâche correspond cette activité ?
4.
 - a. Sans modifier le type de tâche, proposer une question intermédiaire qui faciliterait l'engagement des élèves dans la résolution de cette activité.
 - b. En vous référant à l'annexe 2.5, proposer une modification du pattern pour faciliter le traitement de l'activité.
5. Lors de la correction, quatre élèves présentent leur solution au tableau (annexe 2.6). Donner deux intérêts de confronter, dans le cadre de cette activité, plusieurs réponses d'élèves.
6. Identifier, parmi les quatre réponses d'élèves, celles qui sont justes.
7. L'enseignant souhaite rédiger un bilan de l'activité qui s'appuie sur les productions des élèves pour les convaincre que différentes stratégies sont envisageables. Rédiger un tel bilan comme il pourrait figurer dans un cahier d'élève.
8. Proposer un critère qui permettrait de distinguer les réponses des élèves 2 et 3 concernant la compétence « Communiquer » (définie en annexe 0).
9. En utilisant ce pattern, proposer une question qui conduit à mobiliser la notion d'équation.

B. Une suite linéaire récurrente.

Un enseignant propose l'exercice en annexe 2.7 à des élèves de première suivant l'enseignement de spécialité mathématiques.

10. Reformuler l'énoncé de cet exercice en utilisant le langage des suites numériques.
11. Au regard des éléments de programme de l'annexe 2.8, peut-on exiger d'un de ces élèves qu'il détermine une formule explicite de la suite précédemment définie ?
12. Un élève utilise le tableur pour traiter la question tel que présenté dans l'annexe 2.9. Quelle correction pourrait-on apporter qui exploite les fonctionnalités du tableur ?
13. Quelle question supplémentaire pourrait-on poser aux élèves pour les inciter à utiliser un algorithme ?
14. Un autre élève rédige un programme en langage Python présenté en annexe 2.10 et l'exécute avec la valeur 4.
 - a. L'élève fait le choix d'utiliser une boucle « for ». Pourquoi cette boucle est-elle à privilégier ici par rapport à une boucle « while » ?
 - b. Son programme est-il correct ? Sinon, le corriger.
15. Comment appelle-t-on la suite de l'annexe 2.7 et la constante réelle qui apparaît dans sa formule explicite ?

- 16.** Donner une raison qui justifie que cette activité privilégie le développement de la pensée algorithmique. On pourra s'appuyer sur l'annexe 2.5.

C. Une figure fractale

Un enseignant propose à des élèves de terminale suivant l'enseignement de spécialité mathématiques l'étude du périmètre et de l'aire délimitée par la courbe appelée « *Flocon de Koch* » telle que présentée en annexe 2.11.

- 17.** Citer deux prérequis sur les suites nécessaires à la réalisation de l'activité.
- 18.** En annexe 2.12 sont présentées les réponses de trois groupes d'élèves à la question 1 (de l'annexe 2.11)
- a.** Citer une réussite et une erreur dans la proposition du groupe 2.
 - b.** Donner un intérêt qu'il y a à présenter à l'ensemble de la classe le travail du groupe 1 et celui du groupe 3 ?
- 19.**
- a.** Démontrer l'inégalité de Bernoulli énoncée en annexe 2.13.
 - b.** Le groupe 1 affirme que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$. Démontrer ce résultat à l'aide de l'inégalité de Bernoulli ?
 - c.** Un élève affirme qu'une suite géométrique a toujours une limite finie ou infinie. A-t-il raison ?
 - d.** Énoncer, telle que cela pourrait figurer dans un cahier d'élève, la propriété et la démonstration concernant la convergence d'une suite géométrique $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $q \in \mathbb{R}$.
- 20.** En se référant à l'annexe 2.14, sur quelle propriété du programme de terminale l'enseignant peut-il prendre appui pour convaincre que le *Flocon de Koch* a une aire finie sans avoir à utiliser l'expression de a_n en fonction de n ?
- 21.** Proposer une correction de la question 2 de l'annexe 2.11 telle qu'elle pourrait figurer dans un cahier d'élève en admettant la formule de l'aire donnée en annexe 2.15.
- 22.** Rédiger un énoncé d'exercice qui permettrait à des élèves de terminale suivant l'enseignement de spécialité mathématiques de démontrer l'expression de a_n donnée en annexe 2.15.

Annexe 0 : les six compétences mathématiques

Chercher

- Extraire d'un document les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à ses connaissances.
- S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture.
- Tester, essayer plusieurs pistes de résolution.
- Décomposer un problème en sous-problèmes.

Modéliser

- Reconnaître un modèle mathématique (proportionnalité, équiprobabilité) et raisonner dans le cadre de ce modèle pour résoudre un problème.
- Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques). Comprendre et utiliser une simulation numérique ou géométrique.
- Valider ou invalider un modèle, comparer une situation à un modèle connu (par exemple un modèle aléatoire).

Représenter

- Choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique, géométrique) adaptés pour traiter un problème ou pour étudier un objet mathématique.
- Produire et utiliser plusieurs représentations des nombres.
- Représenter des données sous forme d'une série statistique.
- Utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides (par exemple perspective ou vue de dessus/de dessous) et de situations spatiales (schémas, croquis, maquettes, patrons, figures géométriques, photographies, plans, cartes, courbes de niveau).

Raisonner

- Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques) : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions.
- Mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.
- Démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion.
- Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.

Calculer

- Calculer avec des nombres rationnels, de manière exacte ou approchée, en combinant de façon appropriée le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté (calculatrice ou logiciel).
- Contrôler la vraisemblance de ses résultats, notamment en estimant des ordres de grandeur ou en utilisant des encadrements.
- Calculer en utilisant le langage algébrique (lettres, symboles, etc.).

Communiquer

- Faire le lien entre le langage naturel et le langage algébrique. Distinguer des spécificités du langage mathématique par rapport à la langue française.
- Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.
- Vérifier la validité d'une information et distinguer ce qui est objectif et ce qui est subjectif ; lire, interpréter, commenter, produire des tableaux, des graphiques, des diagrammes.

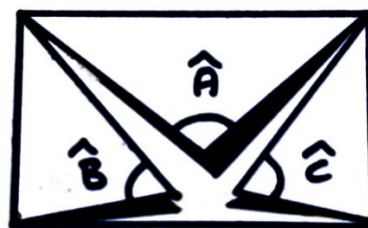
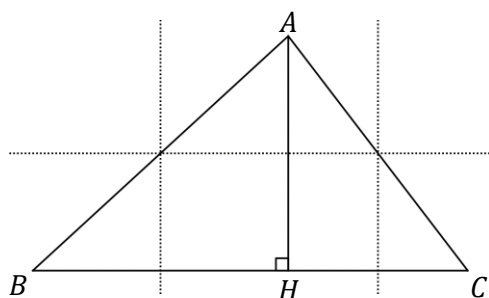
Source : programme du cycle 4

Annexes partie 1

Annexe 1.1

Soit ABC un triangle tel que les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont aigus.

Trace la droite (d) perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point A . Soit H le point d'intersection des droites (d) et (BC) . Effectue les trois pliages selon les trois droites en pointillés ci-dessous de façon à ramener les trois sommets du triangle sur le point H .



Qu'elle observation peut-on faire concernant la somme des angles $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$?

Source : d'après une activité de l'académie de Poitiers

Annexe 1.2

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer
Connaissances - Caractérisation angulaire du parallélisme : angles alternes internes, angles correspondants. - Triangle : - o somme des angles d'un triangle (démonstration possible en utilisant les angles correspondants) ; - o hauteurs et médiatrices ; - o inégalité triangulaire ; - o cas d'égalité des triangles ; - o triangles semblables (une définition et une propriété caractéristique). - Parallélogramme (une définition et une propriété caractéristique). - Le théorème de Thalès et sa réciproque (configurations des triangles emboîtés et du papillon). - Le théorème de Pythagore et sa réciproque. - Lignes trigonométriques dans le triangle rectangle : cosinus, sinus, tangente. Compétences associées - Mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique. - Faire le lien entre les cas d'égalité des triangles et la construction d'un triangle à partir de la donnée de longueurs des côtés et/ou de mesures d'angles. - Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation,

Source : programme du cycle 4

Annexe 1.3

Domaine : Espace et géométrie

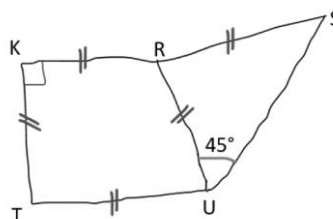
Sous domaine : Utiliser des notions de géométrie plane pour démontrer

Compétences mathématiques : Chercher, calculer, raisonner, communiquer

Références au programme : Mener des raisonnements et s'initier à la démonstration en utilisant les propriétés des figures, des configurations et des transformations

La figure ci-contre a été tracée à main levée.

Quelle est la nature du triangle KUS ? Justifier.



Source : « Élaborer un raisonnement à partir d'une figure codée », document d'accompagnement programme de quatrième

Annexe 1.4

$$KR = RU = UT = TK$$

Donc $KRUT$ est un losange.

Comme $\widehat{K}$ est un angle droit, ça fait que $KRUT$ est un carré.

Donc UR est $\perp$ à KR

$$KR = RS$$

Donc R est le milieu de KS

ça fait que UR est la médiatrice de KS .

Donc par symétrie $\widehat{KUR} = 45^\circ$ et $KU = US$

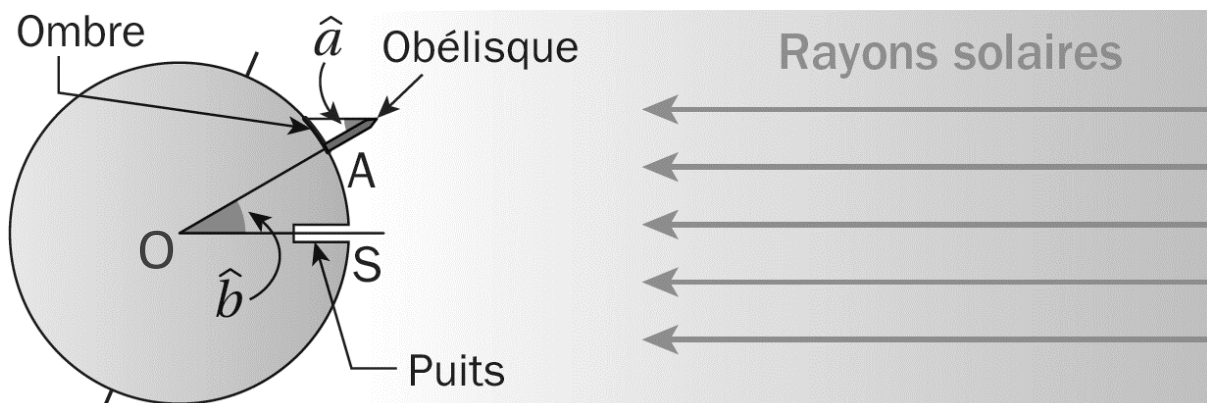
$$\text{Donc } \widehat{KUS} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

KUS est isocèle et aussi rectangle.

Annexe 1.5

Ératosthène suppose que la Terre est ronde et que le Soleil est suffisamment loin pour que ses rayons soient considérés comme parallèles.

Syène (S) et Alexandrie (A) sont sur le même méridien. À midi, le jour du solstice d'été, les puits de Syène sont éclairés jusqu'au fond. Le Soleil est donc, à cet instant, à la verticale de Syène. Au même instant, un obélisque de 50 m de haut à Alexandrie donne une ombre au sol de 6,33 m.



O est le centre du cercle représentant la Terre.

a. Déterminer la mesure de l'angle $\hat{a}$, arrondie au dixième.

b. En déduire la mesure de l'angle $\hat{b}$.

c. Ératosthène évalua la distance entre Syène et Alexandrie à environ 5 000 stades.
(1 stade = 157,5 m).

En déduire la circonférence de la Terre obtenue par Ératosthène.

Source : DIMENSIONS Hatier 3^e

Annexe 1.6

Questions « flash »

La pratique de questions « flash » vise à renforcer la mémorisation de connaissances et l'automatisation de procédures afin de faciliter un travail intellectuel ultérieur par leur mise à disposition immédiate.

Une tâche de ce type relève d'une activité mentale attendue sur un temps court (quelques minutes). Elle peut mobiliser une connaissance, un savoir-faire, un traitement automatique ou réfléchi. Pour être efficaces, les questions flash doivent être proposées de façon régulière, tout au long du cycle, et s'inscrire dans une stratégie d'enseignement qui articule de façon cohérente entraînement, évaluation, remédiation et consolidation. Elles se prêtent à l'utilisation de supports variés : papier, diaporama, enregistrement oral.

Source : ressource Éduscol, « Types de tâches »

Annexe 1.7

2

Calculer des rapports trigonométriques ▶ Vidéo

Propriété et définitions

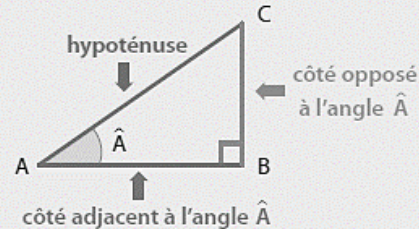
- Dans un triangle ABC rectangle en B, les rapports $\frac{AB}{AC}$, $\frac{BC}{AC}$ et $\frac{BC}{AB}$ ne dépendent que de la mesure de l'angle $\hat{A}$.

Ces rapports sont respectivement appelés cosinus, sinus et tangente de l'angle $\hat{A}$ et notés $\cos \hat{A}$, $\sin \hat{A}$ et $\tan \hat{A}$.

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \hat{A}}{\text{longueur du côté adjacent à } \hat{A}} = \frac{BC}{AB}$$



- Pour mémoriser : SOH CAH TOA

$$\sin(\text{angle}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos(\text{angle}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

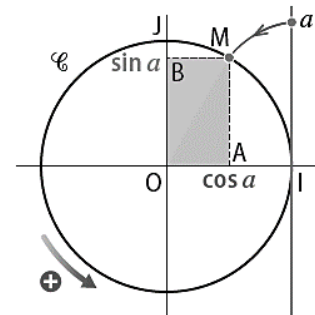
$$\tan(\text{angle}) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

Source : Hachette, Mission Indigo, cycle 4, 3^e

Cosinus et sinus d'un nombre réel

Soit (O, I, J) un repère orthonormé du plan.

Définition : Soit a un nombre réel. On considère le point M du cercle trigonométrique associé au réel a tel que la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ est égale à a . Le cosinus du réel a , noté $\cos(a)$ est l'abscisse du point M. Le sinus du réel a , noté $\sin(a)$ est l'ordonnée du point M.



Source : Bordas, Indice MATHS 1re

Annexe 1.8

Exercice : calcul d'une valeur particulière.

On considère connue la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

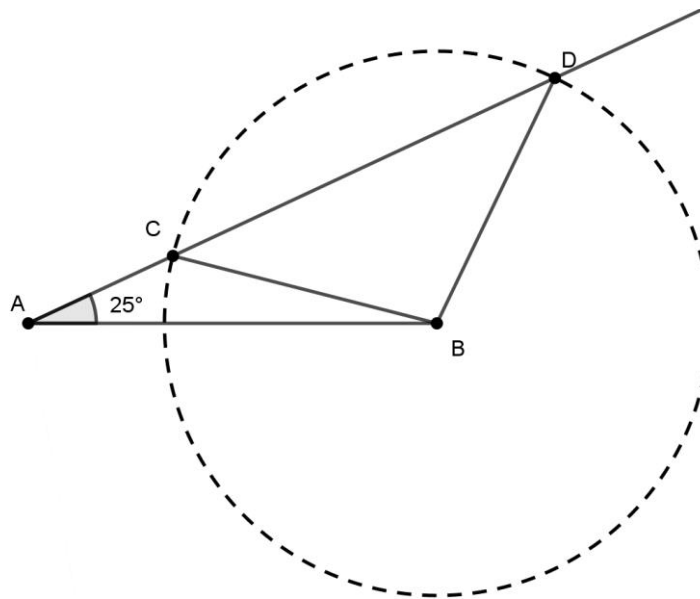
- Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.
- En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Annexe 1.9

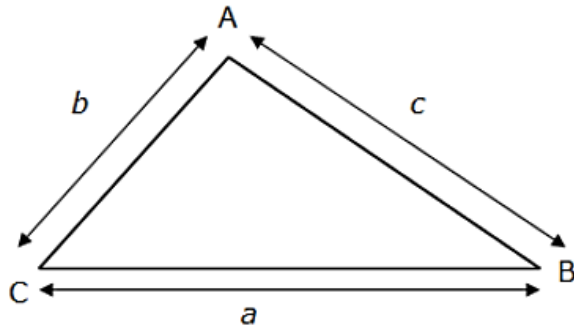
Le verbatim ci-dessous retranscrit les échanges entre un enseignant et des élèves de première suivant l'enseignement de spécialité :

- Enseignant : « Combien de grandeurs comporte un triangle ? »
- Un élève : « Six : trois longueurs et trois angles. »
- Enseignant : « On cherche des informations permettant de déterminer les trois longueurs d'un triangle. Dans quel cas peut-on déterminer la troisième longueur si on connaît les deux autres ? »
- Un élève : « Dans un triangle rectangle avec le théorème de Pythagore. »
- Enseignant : « Si le triangle n'est pas rectangle, est-ce encore possible ? »
- Un élève : « Si on connaît l'angle entre les deux longueurs, on peut le construire. »
- Enseignant : « Aura-t-on tous le même ? »
- Un élève : « Oui. »
- Enseignant : « Et si l'angle donné n'est pas celui entre les deux longueurs ? »
- Un élève : « Je ne sais pas ».

L'enseignant projette au tableau la figure suivante et précise que $AB = 6$, le cercle de centre B a pour rayon 4 et l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 25° .



Annexe 1.10



Soit ABC un triangle tel que $\widehat{ABC}$ soit aigu. On note $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. On considère la hauteur du triangle ABC issue de A , et on note H le pied de cette hauteur (le point d'intersection de cette hauteur et de (BC)).

On note $HB = x$ et $AH = h$.

- 1) Dans le triangle AHB , exprimer c^2 en fonction de x et de h .
- 2) En considérant le triangle AHC et en utilisant le résultat de la question précédente, prouver que :

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ax$$

- 3) a) Déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$.

b) En déduire une expression de x .

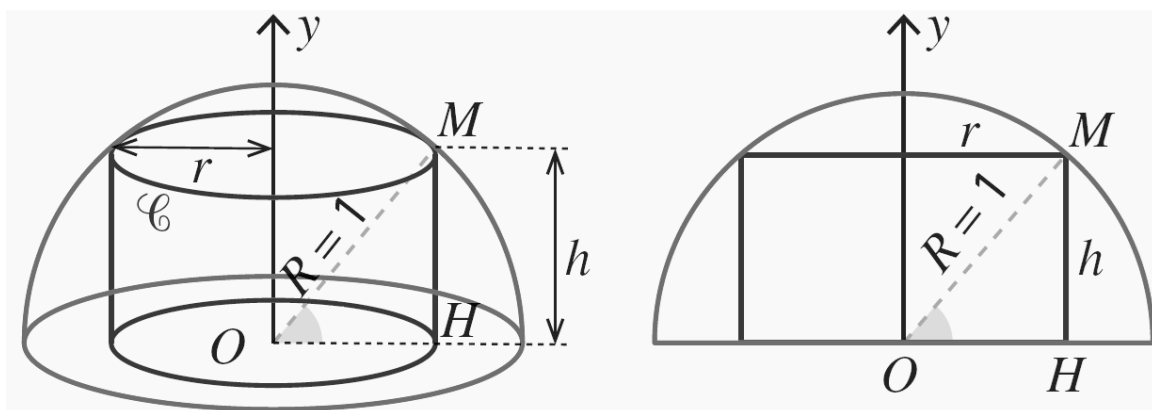
- 4) A l'aide des résultats des questions 2) et 3), prouver la formule d'Al-Kashi :

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos(\widehat{ABC}).$$

Source : d'après un document APMEP

Annexe 1.11

Dans cet exercice, l'unité est le mètre.



On considère un cylindre droit de hauteur h , inscrit dans une demi-sphère de rayon $R = 1$. Le cylindre et la demi-sphère ont le même plan de base $\mathcal{P}$ et le même axe de symétrie (Oy) . La demi-sphère et le cylindre se coupent selon un cercle $\mathcal{C}$ de rayon r . Soient M un point de ce cercle et H le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$. On désigne par α la mesure en radian de l'angle $\widehat{HOM}$ avec

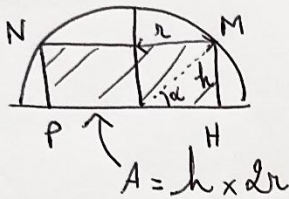
$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Pour quelles valeurs de h et de r le volume du cylindre est-il maximal ?

Annexe 1.12

Le volume du cylindre sera maximal quand l'aire du rectangle PHMN sera maximale car

$$V = h \times 2\pi r = \pi A$$



A l'aire du dessin

$$h = \sin(\alpha)$$

$$r = \cos(\alpha)$$

Avec géogebra je conjecture que l'aire du rectangle est $A = h \times 2r = \sin(\alpha) \times 2 \cos(\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$

Je dérive $A' = 2 \cos(\alpha) \cos(\alpha) + 2 \sin(\alpha) \times (-\sin(\alpha))$
 $= 2 \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

$$A' = 0 \text{ si } \cos^2(\alpha) = \sin^2(\alpha)$$

$$\text{donc } \cos(\alpha) = \sin(\alpha) \text{ donc } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

J'ai vérifié avec ma calculatrice le tracé de la courbe A. Elle est bien maximale en $\frac{\pi}{4}$

Annexes partie 2

Annexe 2.1

Définition d'un *pattern*.

Le pattern est un anglicisme signifiant « motif », « règle de structure », « modèle à reproduire ». C'est une suite d'objets appelés éléments, reliés les uns aux autres par une règle spécifique. Il existe deux types de patterns :

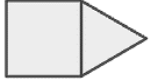
- les patterns répétitifs ;
- les patterns évolutifs en passant d'un rang à un autre.

Le motif de base correspond à la chaîne d'éléments la plus courte qui se répète dans le pattern répétitif ou qui évolue dans le pattern évolutif.

Exemple de pattern répétitif :

		
Rang 1	Rang 2	Rang 3

Exemple de pattern évolutif :

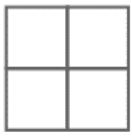
		
Rang 1	Rang 2	Rang 3

Le rang est en général numéroté à partir de 0 ou 1.

Source : inspiré du guide de la résolution de problèmes au collège

Annexe 2.2

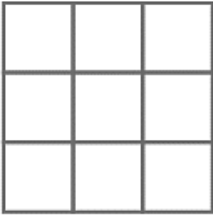
Pattern n°1 : Voici le début d'un pattern.

	
Rang 1	Rang 2

Pattern n°2 : Voici le début d'un pattern.

A B C B	A B C B A B C B	A B C B A B C B A B C B
Rang 1	Rang 2	Rang 3

Pattern n°3 : Voici le début d'un pattern.

		
Rang 1	Rang 2	Rang 3

Pattern n°4 : Voici le début d'un pattern.

1	3	7	15	31
Rang 1	Rang 2	Rang 3	Rang 4	Rang 5

Source : Inspiré du guide de la résolution de problèmes au collège

Annexe 2.3



Rang 1 Rang 2 Rang 3

Déterminer le nombre d'allumettes nécessaires à la construction du motif selon le rang.

Source : Inspiré d'une activité proposée dans l'article « Première rencontre avec l'algèbre » de Mirène Larquier (EMF 2015)

Annexe 2.4

La mise en œuvre du programme doit permettre de faire acquérir aux élèves des connaissances, des méthodes et des démarches spécifiques. En lien avec le cours, elles sont mobilisées et articulées les unes aux autres dans la résolution d'exercices et de problèmes riches et variés, à travers des allers-retours entre le sens et la technique, chacun venant éclairer et consolider l'autre. La diversité des activités concerne aussi bien les contextes (internes aux mathématiques ou liés à des situations issues de la vie quotidienne ou d'autres disciplines) que les types de tâches proposées : « questions flash » pour favoriser l'acquisition d'automatismes, exercices d'application et d'entraînement pour stabiliser et consolider les connaissances, exercices et problèmes ouverts favorisant la prise d'initiatives, débats et mises au point collectives d'une démonstration, production d'écrits individuels formalisant une démarche ou un raisonnement, etc.

Source : extrait du programme mathématiques du cycle 4

Annexe 2.5

Les activités de généralisation basées sur des patterns, qui visent à faire identifier et exprimer des régularités, sont particulièrement adaptées au développement de la pensée algébrique. Comme le précisent Joëlle Vlassis, Isabelle Demonty et Hassane Squalli « ces activités répondent aux critères d'une pensée algébrique dans la mesure où leur objectif consiste à formuler un moyen général au départ d'une indéterminée, en l'occurrence d'une variable. Ces activités invitent à exprimer les généralités produites et leurs justifications dans un langage tout d'abord non conventionnel qui tend à devenir de plus en plus conventionnel au fil des nécessités de l'activité ». Cette expression de généralité permet d'anticiper, de prédire ce qui se passe pour chaque élément, quel que soit son rang dans le pattern, même éloigné et non atteignable directement. C'est précisément cette anticipation qui différencie le mode de pensée algébrique du mode de pensée algorithmique.

Source : Extrait du guide de la résolution de problèmes au collège

Annexe 2.6

Productions de quatre élèves de quatrième.

Élève 1 :

Il faut multiplier le rang par 2 pour obtenir le nombre d'allumettes qui forment les toits. Il faut multiplier le rang par 2 pour obtenir le nombre d'allumettes horizontales. Il faut ajouter 1 au rang pour obtenir le nombre d'allumettes verticales. On ajoute ensuite les trois résultats obtenus.

Élève 2 : Une maison contient 6 allumettes mais il faut enlever les allumettes des bords communs. On fait

$$6 \times rang - (rang - 1)$$

Élève 3 : Je multiplie le rang par 5 et je rajoute 1.

Élève 4 : J'applique la formule suivante : $4x + 4$ où x désigne le rang.

Annexe 2.7

On construit une suite de nombres selon la règle suivante :

- le nombre du rang 1 est 1
- le nombre du rang 2 est 1
- Pour les rangs suivants, chaque nombre est obtenu en additionnant les nombres des deux rangs précédents.

Déterminer le nombre obtenu au rang 50.

Annexe 2.8

Connaissances

- Exemples de modes de génération d'une suite : explicite $u_n = f(n)$, par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, par un algorithme, par des motifs géométriques. Notations : $u(n)$, u_n , $(u(n))$, (u_n) .
- Suites arithmétiques : exemples, définition, calcul du terme général. Lien avec l'étude d'évolutions successives à accroissements constants. Lien avec les fonctions affines. Calcul de $1 + 2 + \dots + n$.
- Suites géométriques : exemples, définition, calcul du terme général. Lien avec l'étude d'évolutions successives à taux constant. Lien avec la fonction exponentielle. Calcul de $1 + q + \dots + q^n$.
- Sur des exemples, introduction intuitive de la notion de limite, finie ou infinie, d'une suite.

Capacités associées

- Dans le cadre de l'étude d'une suite, utiliser le registre de la langue naturelle, le registre algébrique, le registre graphique, et passer de l'un à l'autre.
- Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres. Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour une suite définie par un motif géométrique, par une question de dénombrement.
- Calculer des termes d'une suite définie explicitement, par récurrence ou par un algorithme.
- Pour une suite arithmétique ou géométrique, calculer le terme général, la somme de termes consécutifs.
- Modéliser un phénomène discret à croissance linéaire par une suite arithmétique, un phénomène discret à croissance exponentielle par une suite géométrique.
- Conjecturer, dans des cas simples, la limite éventuelle d'une suite.

Démonstrations

- Calcul du terme général d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique.
- Calcul de $1 + 2 + \dots + n$.
- Calcul de $1 + q + \dots + q^n$.

Exemples d'algorithme

- Calcul de termes d'une suite, de sommes de termes, de seuil.
- Calcul de factorielle.
- Liste des premiers termes d'une suite : suites de Syracuse, suite de Fibonacci.

Source : Extrait du programme de première spécialité mathématiques.

Annexe 2.9

	A	B
1	rang	u_n
2	1	1
3	2	1
4	3	2
5	4	3
6	5=3+2	

Annexe 2.10

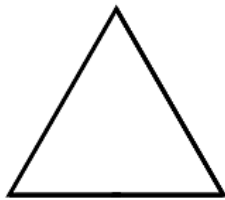
Script

```
def suite(n):  
    u=1  
    v=1  
    for i in range(3,n+1):  
        u=v  
        v=u+v  
    return v
```

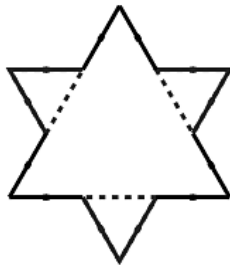
Console

```
>>> suite(4)  
4
```

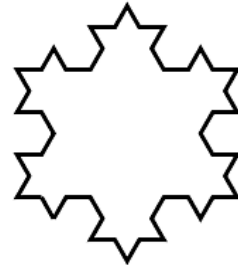
Annexe 2.11



Rang 0



Rang 1



Rang 2

- Au rang 0, le triangle est équilatéral.
- Au rang 1, on partage chaque côté en trois segments de même longueur et on construit des triangles équilatéraux sur chaque bord
- Au rang 2, on recommence le procédé. Tous les segments sont de même longueur
- ...

Le *Flocon de Koch* est le nom de la figure obtenue quand on poursuit indéfiniment le procédé de construction précédent.

Pour tout entier naturel n , on note :

- p_n la mesure du périmètre du polygone obtenu au rang n (en unité de longueur)
- a_n la mesure de l'aire délimitée par le polygone obtenu au rang n (en unité d'aire)

On appelle :

- périmètre du *Flocon de Koch* la limite de la suite (p_n)
- aire du *Flocon de Koch* la limite de la suite (a_n)

1. Quelle sera la mesure du périmètre du *Flocon de Koch* ?
2. Quelle sera la mesure de l'aire délimitée par le *Flocon de Koch* ?

Source : Inspiré d'une ressource de la problématique (CSEN)

Annexe 2.12

Groupe 1 :

Périmètre:

On note a la longueur d'un côté à l'étape 0

u_n est la suite qui modélise la longueur d'un côté et s_n est la suite qui modélise le nombre de côtés

$$u_0 = a$$

$$u_1 = \frac{a}{3}$$

$$u_2 = \frac{a}{9} = \frac{a}{3^2}$$

$$u_3 = \frac{a}{27} = \frac{a}{3^3}$$

$$\text{Donc } u_n = \frac{a}{3^n}$$

$$\begin{array}{l} s_0 = 3 \\ s_1 = 12 \\ s_2 = 48 \\ s_3 = 192 \end{array} \begin{array}{l} \times 4 \\ \times 4 \\ \times 4 \\ \times 4 \end{array}$$

$$\text{Donc } s_n = 3 \times 4^n$$

On note p_n la suite qui modélise le périmètre du triangle

$$p_n = u_n \times s_n = \frac{a}{3^n} \times 3 \times 4^n = 3a \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$$

Groupe 2 :

- étape 0 : 3 segments ; 1 triangle
- étape 1 : 12 segments ; 6 triangles
- étape 2 : 48 segments ; 18 triangles

On voit que le nb de segments nous aide à trouver le périmètre mais pas le nb de triangles.
+ le nb de segments est à chaque fois multiplié par 4.

Or, la taille du segment est divisé par 3 à chaque étape.

On cherche une formule qui combine le nb de segments et leur taille

$$\begin{array}{cccc} n^0 & n^1 & n^2 & n^3 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \\ \downarrow \times 4 & \downarrow \times 4 & \downarrow \times 4 & \\ \downarrow : \frac{1}{3} & \downarrow : \frac{1}{3} & \downarrow : \frac{1}{3} & \end{array}$$

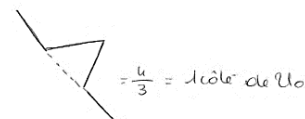
$$u_{n+1} = 4u_n : \frac{1}{3}^{n+1}$$

Groupe 3 :

3^{ème} piste : Calcul du périmètre

- Page 0 : p.3

conjecture : $U_{n+1} = \frac{4}{3} \times U_n$ suite géométrique $\Leftrightarrow U_n = U_0 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$



Annexe 2.13

Propriété Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel a strictement positif et pour tout entier naturel n : $(1 + a)^n \geq 1 + na$

Source : Extrait du manuel « Maths Tle Spécialité », édition Magnard

Annexe 2.14

• Suites

Contenus

- La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. Cas des suites croissantes non majorées. Suite tendant vers $-\infty$.
- La suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- Limites et comparaison. Théorèmes des gendarmes.
- Opérations sur les limites.
- Comportement d'une suite géométrique (q^n) où q est un nombre réel.
- Théorème admis : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

Capacités attendues

- Établir la convergence d'une suite, ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.

Démonstrations

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Limite de (q^n) , après démonstration par récurrence de l'inégalité de Bernoulli.
- Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.
- Limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction exponentielle.

Exemples d'algorithme

- Recherche de seuils.
- Recherche de valeurs approchées de π , e , $\sqrt{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\ln(2)$, etc.

Approfondissements possibles

- Propriétés et utilisation des suites adjacentes.
- Exemples de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
- Exemples d'application de la méthode de Newton. Étude de la convergence de la méthode de Héron.

Source : Extrait du programme de terminale spécialité mathématiques

Annexe 2.15

Notons $\ell > 0$ la longueur d'un côté du triangle équilatéral du rang 0. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \ell^2 \left[1 + \frac{3}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right) \right]$$