BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jeudi 20 juin 2024

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans. Elle constate que 60% de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47% ont acheté la carte de fidélité.
Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.
On interroge au hasard un client et on considère les événements suivants :

- R: « le client est un client régulier » ;
- F: « le client a acheté la carte de fidélité ».

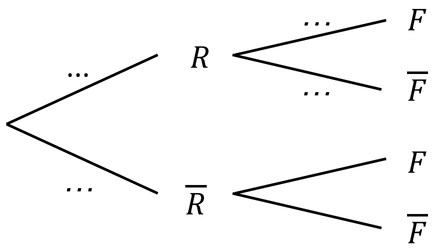
Pour un événement E quelconque, on note $\bar{E}$ son événement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

1.

a. Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.

b. Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.

c. Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.



d. Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers. Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.

2. On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0{,}38$.

Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.

a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier.

b. Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

Partie B

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.
On choisit au hasard un échantillon de 1000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1000 clients. On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100 000.

On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.
On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.
On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{Y}{1000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice. Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,72275.

3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

Exercice 2 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points $A(0;4;-1)$, $B(6;1;5)$ et $C(6;-2;-1)$. On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 1 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases}x = 2+2t\\ y = 3-t\\ z = 1+2t\end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point C et orthogonal à la droite (AB) est $2x + 2y - z - 9 = 0$.

On considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ dont on donne ci-dessous une représentation paramétrique :

$$\mathcal{D} : \begin{cases}x = 3+t\\ y = 1+t\\ z = 2+t\end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}\,; \qquad \mathcal{D}' : \begin{cases}x = 2t'\\ y = 4-t'\\ z = -1+2t'\end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Exercice 3 (5 points)

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = {u_n}^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a.

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$.

1.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$.

2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.

a. En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n < 2.$$

b. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$.

1. On donne ci-contre la fonction u écrite en langage Python.

Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit `u(2,1)` et `u(2,2)` dans la console Python.

```
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n):
        u=u**2-2*u+2
    return u
```

2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a = 2$? On admettra ce résultat sans démonstration.

Partie C : étude dans le cas général.

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de a.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)}$.

2. Déterminer, suivant les valeurs du réel a strictement supérieur à 1, la limite de la suite (u_n).

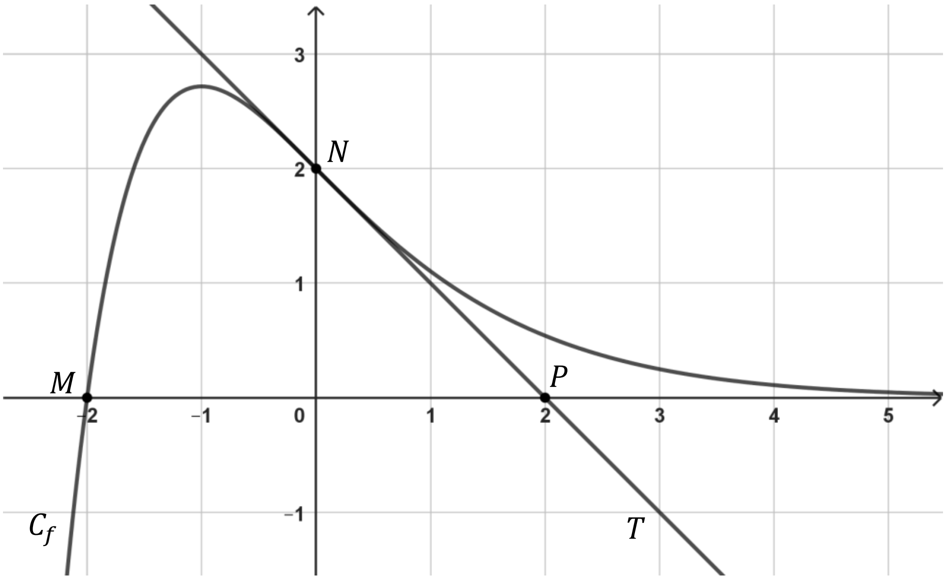
Exercice 4 (6 points)

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative C_f de la fonction f ;
- la tangente T à C_f en son point $N(0\,;2)$;
- le point $M\,(-2\,;0)$ appartenant à C_f et $P(2\,;0)$ appartenant à la tangente T.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.



Partie A : étude graphique.

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1.

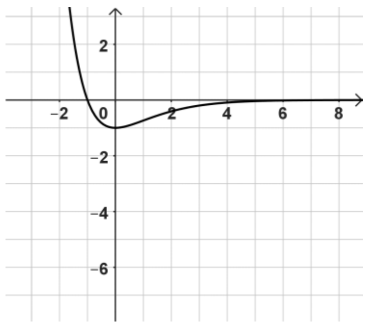
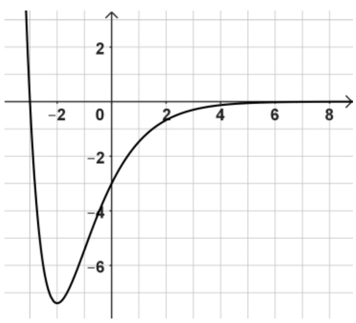
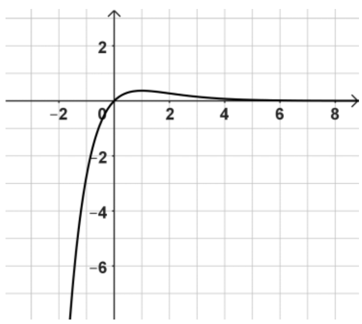
  a. Donner $f(0)$.

  b. Déterminer $f'(0)$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.

4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.

Courbe 1	Courbe2	Courbe 3
		

Partie B : recherche d'une expression algébrique.

On admet que la fonction f est de la forme $f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{\lambda x}$, où a, b et λ sont des constantes réelles. Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.

2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.

3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique.

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. On admet que $f'(x) = (-x - 1)\mathrm{e}^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f. Justifier.

3.

- **a.** Étudier la convexité de f.
- **b.** Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe C_f.

4. Pour tout nombre réel $t \geq 0$, on pose :

$$I(t) = \int_{-2}^{t} f(x)dx .$$

- **a.** En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I(t) = (-t - 3)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^2 .$$

- **b.** En déduire un exemple de surface non limitée dont l'aire est finie.