Sujets de Baccalauréat
Mathématiques

Sessions 2021 – 2026

Liste complète des sujets originaux

93 sujets

Table des matières

I Session 2021 1

1 ► Sujet Zéro (21-MATZERO) 2

2 ► Sujet 1 (21-MATUN) 12

3 ► Sujet 2 (21-MATDEUX) 19

4 ► Amérique du Nord - Jour 1 (21-MATJ1AN1) 26

5 ► Polynésie - Jour 2 (21-MATJ2PO1) 33

6 ► Métropole - Jour 1 Session 2 (21-MATJ1ME2) 43

7 ► Métropole - Jour 2 Session 2 (21-MATJ2ME2) 51

8 ► Asie - Jour 1 (21-MATJ1JA1) 58

9 ► Asie - Jour 2 (21-MATJ2JA1) 65

10 ► Centres Étrangers - Jour 1 (21-MATJ1G11) 74

11 ► Centres Étrangers - Jour 2 (21-MATJ2G11) 84

12 ► Métropole - Jour 1 Remplacement (21-MATJ1ME3) 94

13 ► Métropole - Jour 2 Remplacement (21-MATJ2ME3) 104

II Session 2022 113

14 ► Polynésie - Jour 1 (22-MATJ1PO1) 114

15 ► Polynésie - Jour 2 (22-MATJ2PO1) 122

16 ► Métropole - Jour 1 (22-MATJ1ME1) 130

17 ► Métropole - Jour 2 (22-MATJ2ME1) 136

18 ► Centres Étrangers - Jour 1 (22-MATJ1G11) 144

19 ► Centres Étrangers - Jour 2 (22-MATJ2G11) 151

20 ► Asie - Jour 1 (22-MATJ1JA1) 158

21 ► Asie - Jour 2 (22-MATJ2JA1) 169

22 ► La Réunion - Jour 1 (22-MATJ1LR1) 178

23 ► La Réunion - Jour 2 (22-MATJ2LR1) 186

24 ► Amérique du Nord - Jour 1 (22-MATJ1AN1) 194

25 ► Amérique du Nord - Jour 2 (22-MATJ2AN1) 200

26 ► Polynésie - Jour 1 Remplacement (22-MATJ1PO3) 209
27 ► Métropole - Jour 1 Remplacement (22-MATJ1ME3) 219
28 ► Métropole - Jour 2 Remplacement (22-MATJ2ME3) 225
29 ► Amérique du Sud - Jour 1 (22-MATJ1AS1) 232
30 ► Amérique du Sud - Jour 2 (22-MATJ2AS1) 238
31 ► Nouvelle-Calédonie - Jour 1 (22-MATJ1NC1) 244
32 ► Nouvelle-Calédonie - Jour 2 (22-MATJ2NC1) 251

III Session 2023 258

33 ► Centres Étrangers - Jour 1 (23-MATJ1G11) 259
34 ► Centres Étrangers - Jour 2 (23-MATJ2G11) 267
35 ► Polynésie - Jour 1 (23-MATJ1PO1) 274
36 ► Polynésie - Jour 2 (23-MATJ2PO1) 281
37 ► Métropole - Jour 1 (23-MATJ1ME1) 289
38 ► Métropole - Jour 2 (23-MATJ2ME1) 295
39 ► Liban - Jour 1 (23-MATJ1LI1) 301
40 ► Liban - Jour 2 (23-MATJ2LI1) 308
41 ► Asie - Jour 1 (23-MATJ1JA1) 314
42 ► Asie - Jour 2 (23-MATJ2JA1) 325
43 ► Amérique du Nord - Jour 1 (23-MATJ1AN1) 333
44 ► Amérique du Nord - Jour 2 (23-MATJ2AN1) 341
45 ► La Réunion - Jour 1 (23-MATJ1LR1) 347
46 ► La Réunion - Jour 2 (23-MATJ2LR1) 353
47 ► Nouvelle-Calédonie - Jour 1 (23-MATJ1NC1) 359
48 ► Nouvelle-Calédonie - Jour 2 (23-MATJ2NC1) 365
49 ► Polynésie - Jour 1 Remplacement (23-MATJ1PO3) 371
50 ► Métropole - Jour 1 Remplacement (23-MATJ1ME3) 379
51 ► Métropole - Jour 2 Remplacement (23-MATJ2ME3) 384
52 ► Amérique du Sud - Jour 1 (23-MATJ1AS1) 390
53 ► Amérique du Sud - Jour 2 (23-MATJ2AS1) 398

IV Session 2024 404

54 ► Sujets Zéro (24-MATSUJET0) 405
55 ► Amérique du Nord - Jour 1 (24-MATJ1AN1) 419
56 ► Amérique du Nord - Jour 2 (24-MATJ2AN1) 425
57 ► Centres Étrangers - Jour 1 (24-MATJ1G11) 432
58 ► Centres Étrangers - Jour 1 Secours (24-MATG11BIS) 439
59 ► Centres Étrangers - Jour 2 (24-MATJ2G11) 446
60 ► Asie - Jour 1 (24-MATJ1JA1) 452
61 ► Asie - Jour 2 (24-MATJ2JA1) 460
62 ► Métropole - Jour 1 (24-MATJ1ME1) 467
63 ► Métropole - Jour 1 Secours (24-MATJ1ME2) 474
64 ► Métropole - Jour 2 (24-MATJ2ME1) 480
65 ► Métropole - Jour 2 Secours (24-MATJ2ME2) 487
66 ► Polynésie - Jour 1 (24-MATJ1PO1) 494
67 ► Polynésie - Jour 2 (24-MATJ2PO1) 501
68 ► Polynésie - Jour 1 Remplacement (24-MATJ1PO3) 509
69 ► Métropole - Jour 1 Remplacement (24-MATJ1ME3) 515
70 ► Métropole - Jour 2 Remplacement (24-MATJ2ME3) 522
71 ► Amérique du Sud - Jour 1 (24-MATJ1AS1) 529
72 ► Amérique du Sud - Jour 2 (24-MATJ2AS1) 536

V Session 2025 543

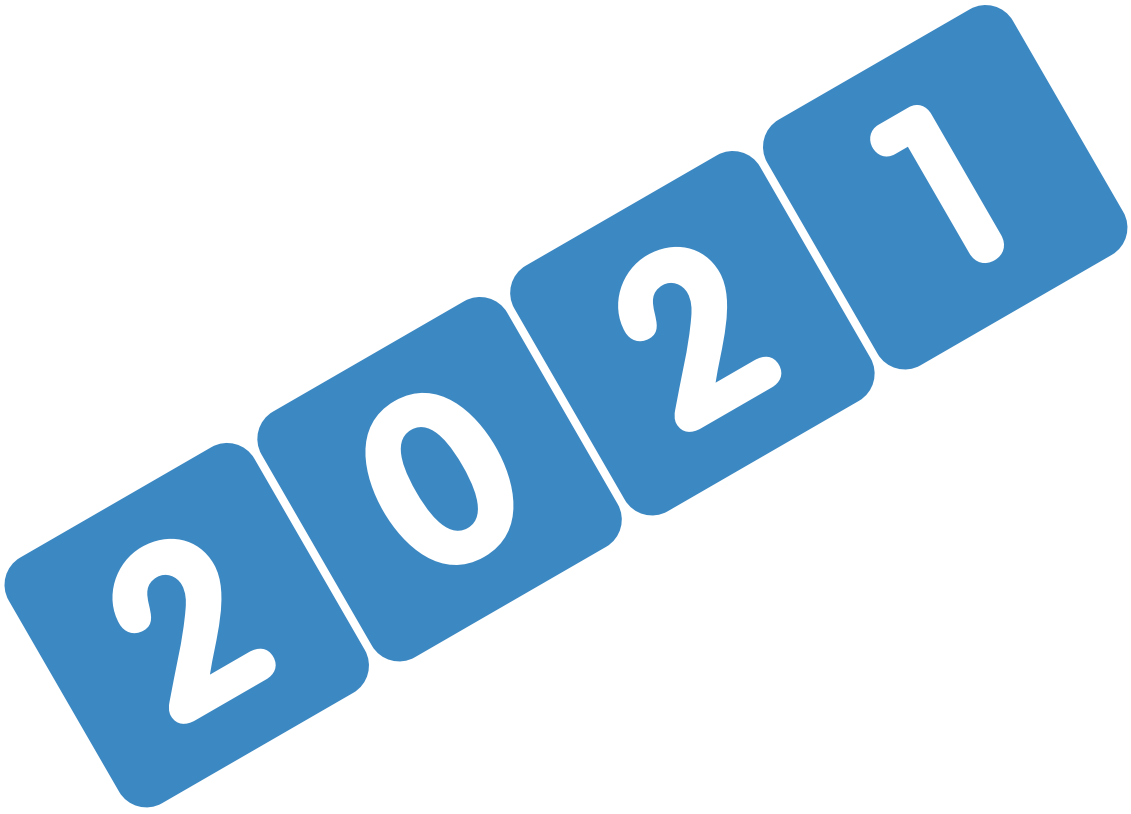
73 ► Amérique du Nord - Jour 1 (25-MATJ1AN1) 544
74 ► Amérique du Nord - Jour 2 (25-MATJ2AN1) 552
75 ► Amérique du Nord - Jour 2 Secours (25-MATPE2) 559
76 ► Asie - Jour 1 (25-MATJ1JA1) 566
77 ► Asie - Jour 2 (25-MATJ2JA1) 573
78 ► Centres Étrangers - Jour 1 (25-MATJ1G11) 581
79 ► Centres Étrangers - Jour 2 (25-MATJ2G11) 589
80 ► Métropole - Jour 1 (25-MATJ1ME1) 595

81 ► Métropole - Jour 2 (25-MATJ2ME1) 603
82 ► Polynésie - Jour 1 (25-MATJ1PO1) 611
83 ► Polynésie - Jour 2 (25-MATJ2PO1) 621
84 ► Polynésie - Jour 1 Remplacement (25-MATJ1PO3) 628
85 ► Métropole - Jour 1 Remplacement (25-MATJ1ME3) 637
86 ► Asie - Jour 2 Remplacement (25-MATPE4) 647
87 ► Métropole - Jour 2 Remplacement (25-MATJ2ME3) 654
88 ► Amérique du Sud - Jour 1 (25-MATJ1AS1) 662
89 ► Amérique du Sud - Jour 2 (25-MATJ2AS1) 669
90 ► Nouvelle-Calédonie - Jour 1 (25-MATJ1NC1) 675
91 ► Nouvelle-Calédonie - Jour 2 (25-MATJ2NC1) 682

VI Session 2026 689

92 ► Amérique du Nord - Jour 1 (26-MATJ1AN1) 690
93 ► Amérique du Nord - Jour 2 (26-MATJ2AN1) 700

Première partie
Session 2021



1 Sujet Zéro (21-MATZERO)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Session 2021 – sujet 0

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et **un seul** des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leq w_n \leq v_n$.

On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.

b. La suite (w_n) converge vers 1.

c. La suite (u_n) est minorée par 1.

d. La suite (w_n) est croissante.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$.
La fonction dérivée de f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$

b. $f'(x) = (1 + 2x)\mathrm{e}^{x^2}$

c. $f'(x) = (1 + 2x^2)\mathrm{e}^{x^2}$

d. $f'(x) = (2 + x^2)\mathrm{e}^{x^2}$

3. Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1}$?

a. -1 **b.** 0 **c.** $\dfrac{1}{2}$ **d.** $+\infty$

4. On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-1; 1]$ telle que

$$h(-1) = 0 \qquad h(0) = 2 \qquad h(1) = 0\,.$$

On peut affirmer que :

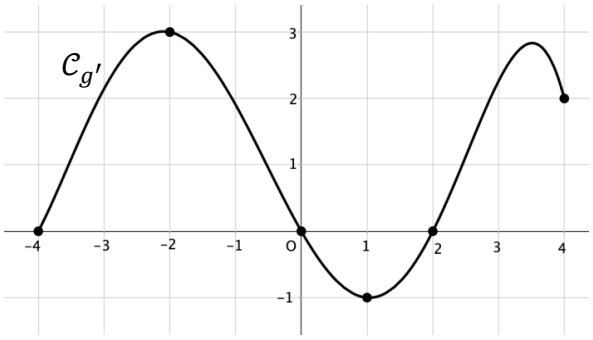
a. La fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\,;0]$.

b. La fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

c. Il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[0; 1]$ tel que $h(a) = 1$.

d. L'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-1\,;1]$.

5. On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$.
On donne ci-contre la représentation graphique **de sa fonction dérivée** g'.



On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.

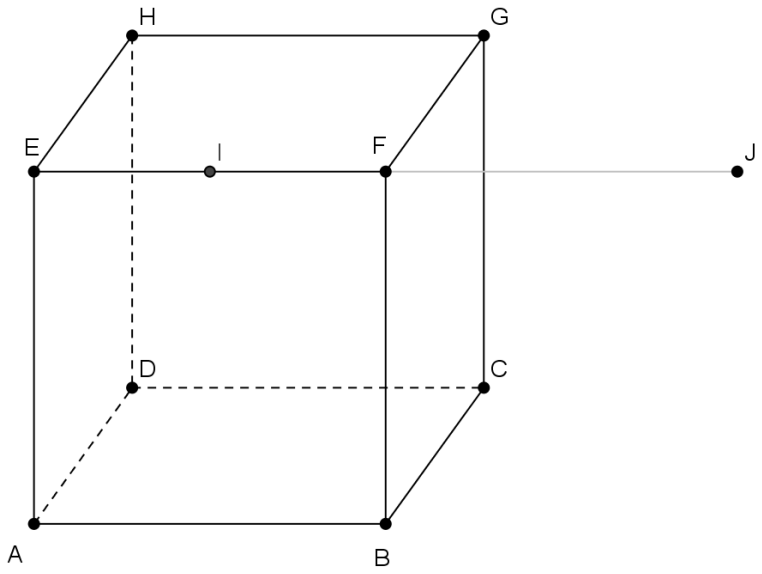
b. g est croissante sur l'intervalle $[1; 2]$.

c. g est convexe sur l'intervalle $[1; 2]$.

d. g admet un minimum en 0.

EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. **a.** Par lecture graphique, donner les coordonnées des points I et J.

b. En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$.

c. Montrer que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

d. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x - y + z - 2 = 0$.

2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b. On considère le point L de coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$.

Montrer que L est le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).

3. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

a. Calculer le volume de la pyramide FBGI.

b. En déduire l'aire du triangle BGI.

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

- la formation avec *conduite accompagnée* ;
- la formation *traditionnelle*.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

- 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée* ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.
- 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation *traditionnelle* ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.

On considère les événements suivants :

A : « la personne a suivi une formation avec *conduite accompagnée* » ;

R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;

R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;

R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.

Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une fraction irréductible.

2. **a.** Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation.

b. Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.

c. La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* ?

3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.
Ainsi, $\{X = 1\}$ correspond à l'événement R_1.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.

On admet que la probabilité de l'événement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.

a. Dans le contexte de cette question, préciser un événement dont la probabilité est égale à $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

On considère la fonction Python **seuil** ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$.

```
def seuil(p):
    n = 1
    while 1-(5/6)**n <= p:
        n = n+1
    return n
```

b. Quelle est la valeur renvoyée par la commande **seuil**(0.9) ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

*Le candidat doit traiter **un seul des deux exercices** A ou B.*

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

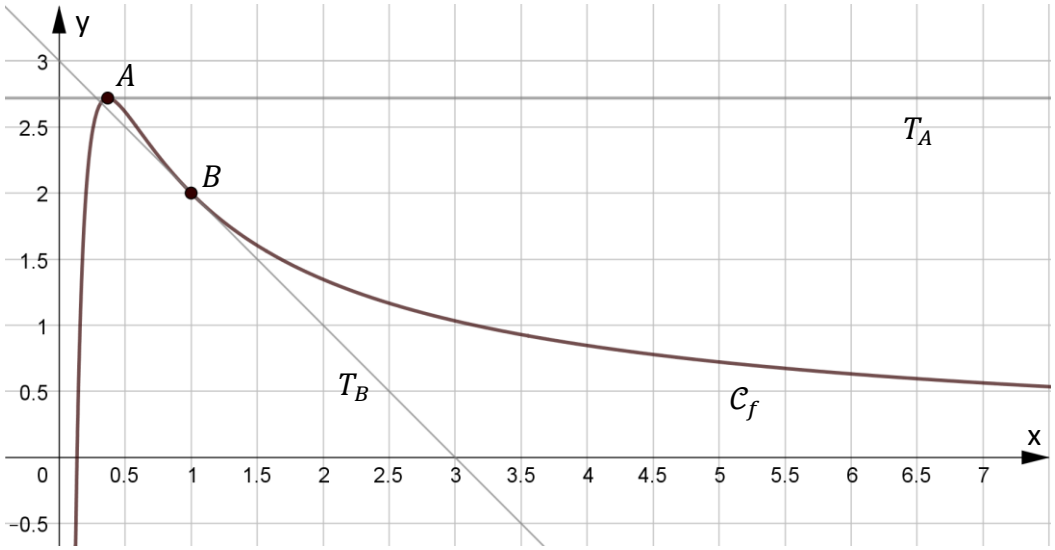
Exercice A (5 points)

Principaux domaines abordés
Logarithme
Dérivation, convexité, limites

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$;
- la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $(\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\mathrm{e})$;
- la tangente T_B à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;2)$.

La droite T_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

Partie I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite T_B.

Partie II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f

On admet que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{1 + 2\ln(x)}{x^3}.$$

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Exercice B

Principaux domaines abordés

Équations différentielles

Fonction exponentielle ; suites

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.

On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.

On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.

Ainsi, $f(0{,}5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.

Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C.

On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. **a.** Préciser la valeur de $f(0)$.

b. Résoudre l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

c. En déduire que pour tout réel $t \geq 0$, on a $f(t) = 200\,\mathrm{e}^{-6t} + 25$.

2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :

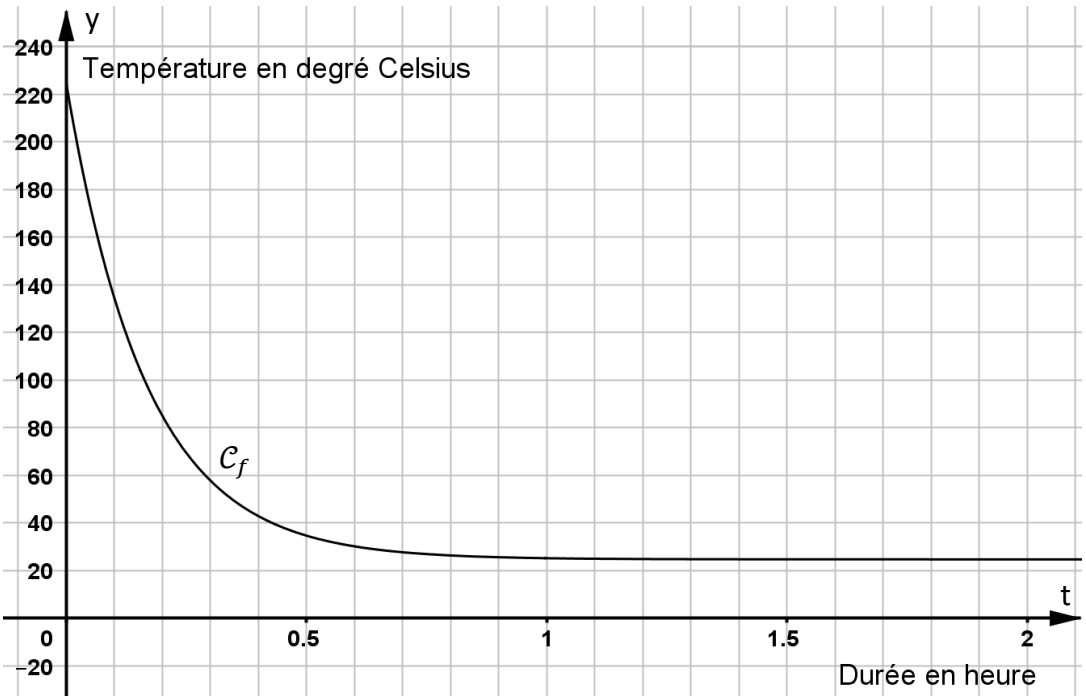
- décroît ;
- tend à se stabiliser à la température ambiante.

La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations ?

3. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[0\,;\,+\infty[$.

Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40 °C. On note T_0 le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.
On donne en page suivante la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.

4. Avec la précision permise par le graphique, lire T_0. On donnera une valeur approchée de T_0 sous forme d'un nombre entier de minutes.



5. On s'intéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température d'une baguette à sa sortie du four.

Ainsi, pour un entier naturel n, D_n désigne la diminution de température en degré Celsius d'une baguette entre la n-ième et la $(n+1)$-ième minute après sa sortie du four.

On admet que, pour tout entier naturel n :

$$D_n = f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right).$$

a. Vérifier que 19 est une valeur approchée de D_0 à $0{,}1$ près, et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

b. Vérifier que l'on a, pour tout entier naturel n : $D_n = 200\ \mathrm{e}^{-0{,}1n}(1 - \mathrm{e}^{-0{,}1})$.

En déduire le sens de variation de la suite (D_n), puis la limite de la suite (D_n).

Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ?

2 Sujet 1 (21-MATUN)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (5 points)

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie I

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement.
On notera :

- D l'événement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'événement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{A}$ les événements contraires des événements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.

3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à $0{,}24$.

4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie II

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0{,}24$.
On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?

b. Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.

c. Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.

2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0{,}24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

a. Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.

b. À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à $0{,}99$?

Exercice 2, commun à tous les candidats (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1.

a. Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C_f.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.

4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

5. On note Δ la droite d'équation $y=-x$.
On note A un éventuel point de C_f d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe C_f est parallèle à la droite Δ.

a. Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1)+x^2=0$.

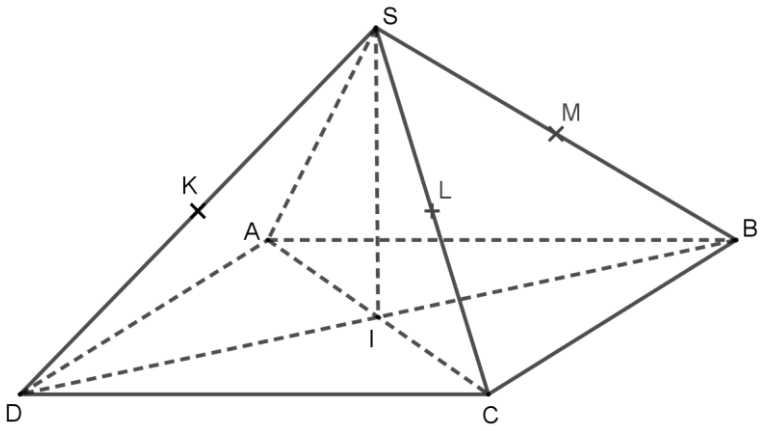
On note g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^x(x-1)+x^2$.
On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

b. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0;+\infty[$.

c. Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à C_f est parallèle à la droite Δ.

Exercice 3, commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD. On suppose que : IC = IB = IS = 1.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace$(I ; \vec{IC}, \vec{IB}, \vec{IS})$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$I(0 ; 0 ; 0) ; A(-1 ; 0 ; 0) ; B(0 ; 1 ; 0) ; C(1 ; 0 ; 0) ; D(0 ; -1 ; 0) ; S(0 ; 0 ; 1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; 1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\vec{AS}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\begin{cases}x = -1 - t\\y = t\\z = -t\end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ **b.** $\begin{cases}x = -1 + 2t\\y = 0\\z = 1 + 2t\end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ **c.** $\begin{cases}x = t\\y = 0\\z = 1 + t\end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ **d.** $\begin{cases}x = -1 - t\\y = 1 + t\\z = 1 - t\end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

5. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

a. $y + z - 1 = 0$ **b.** $x + y + z - 1 = 0$ **c.** $x - y + z = 0$ **d.** $x + z - 1 = 0$

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Suites numériques ; raisonnement par récurrence ; suites géométriques.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1\,.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

2.

a. Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.

b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

c. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1\,.$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme ; convexité.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$

3.

a. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$. On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

b. Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$.

4. Étudier la convexité de la fonction f, c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0;+\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave. On justifiera que la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

3 Sujet 2 (21-MATDEUX)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

PARTIE I

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement $97\,\%$ des adresses ; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses.
Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0{,}03$.

1. La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

a. 0 **b.** 1 **c.** 0,24 **d.** 0,76

2. La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

a. $\binom{9}{2} \times 0{,}97^2 \times 0{,}03^7$ **b.** $\binom{7}{2} \times 0{,}97^2 \times 0{,}03^7$

c. $\binom{9}{2} \times 0{,}97^7 \times 0{,}03^2$ **d.** $\binom{7}{2} \times 0{,}97^7 \times 0{,}03^2$

3. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

a. $P(X < 1)$ **b.** $P(X \leq 1)$ **c.** $P(X \geq 2)$ **d.** $1 - P(X = 0)$

PARTIE II

Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher.
On tire au hasard successivement et **sans remise** deux boules de l'urne.
On considère les évènements suivants :

- V_1 : « la première boule tirée est verte » ;
- B_1 : « la première boule tirée est blanche » ;
- V_2 : « la seconde boule tirée est verte » ;
- B_2 : « la seconde boule tirée est blanche ».

4. La probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé, notée $P_{V_1}(V_2)$, est égale à :

a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{4}{7}$ **c.** $\frac{5}{14}$ **d.** $\frac{20}{56}$

5. La probabilité de l'événement V_2 est égale à :

a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{5}{7}$ **c.** $\frac{3}{28}$ **d.** $\frac{9}{7}$

Exercice 2, commun à tous les candidats (6 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, **on admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1.

a. Calculez u_1 et v_1.

b. Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n \geq 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a: $u_n \geq n + 1$.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. On pose, pour tout entier naturel n :

$$r_n = \frac{v_n}{u_n}.$$

On admet que :

$$r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{{u_n}^2}.$$

a. Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}.$$

b. En déduire :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{{u_n}^2}.$$

c. Déterminer la limite de la suite $({r_n}^2)$ et en déduire que (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

d. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}.$$

e. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def seuil():
    n=0
    r=1
    while abs(r-sqrt(2))>10**(-4) :
        r=(2+r)/(1+r)
        n=n+1
    return n
```

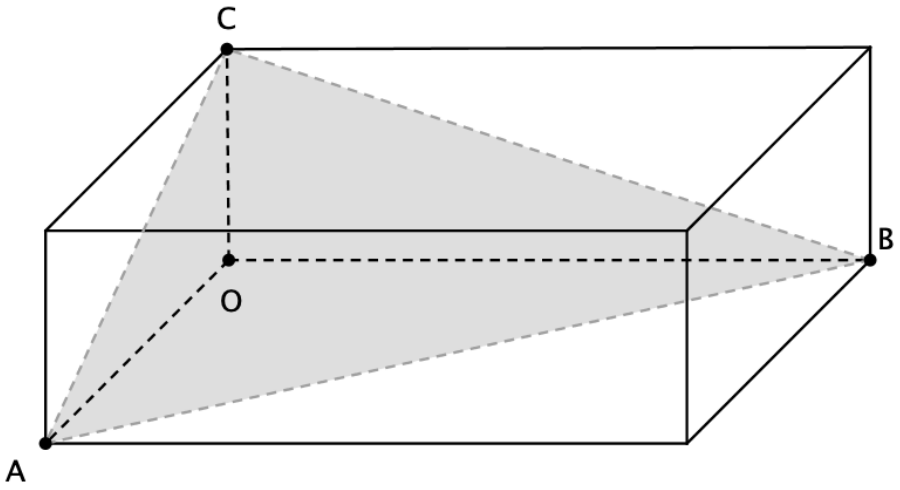
(`abs` désigne la valeur absolue, `sqrt` la racine carrée et `10**(-4)` représente 10^{-4})

La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.
À quoi correspond-elle ?

Exercice 3, commun à tous les candidats (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points :

A de coordonnées $(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$, B de coordonnées $(0\ ;\ 3\ ;\ 0)$ et C de coordonnées $(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$.



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b. Montrer que la droite d coupe le plan (ABC) au point H de coordonnées $\left(\frac{18}{49}\ ;\frac{12}{49}\ ;\frac{36}{49}\right)$.

c. Calculer la distance OH.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide OABC, déterminer l'aire du triangle ABC.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

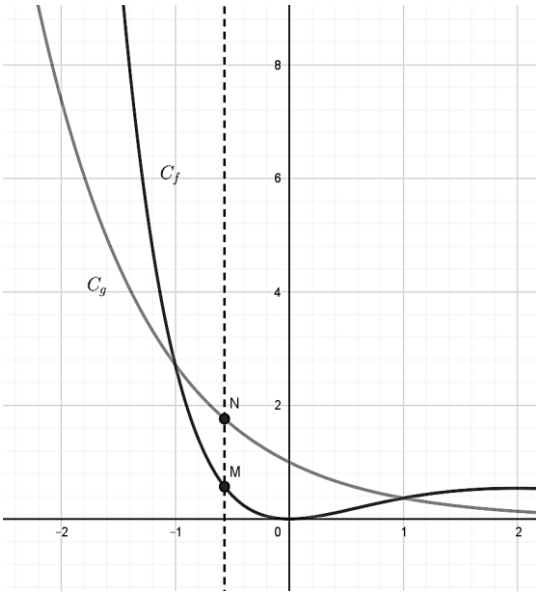
Exercice A

Principaux domaines abordés :

Fonction exponentielle ; dérivation.

Le graphique ci-contre représente, dans un repère orthogonal, les courbes C_f et C_g des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}\,.$$



La question 3 est indépendante des questions 1 et 2.

1. a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_f et C_g.

b. Étudier la position relative des courbes C_f et C_g.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\,;1]$, on considère les points M de coordonnées $\big(x\,;f(x)\big)$ et N de coordonnées $\big(x\,;g(x)\big)$, et on note $d(x)$ la distance MN.
On admet que : $d(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x}$.

On admet que la fonction d est dérivable sur l'intervalle $[-1;1]$ et on note d' sa fonction dérivée.

a. Montrer que $d'(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 - 2x - 1)$.

b. En déduire les variations de la fonction d sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

c. Déterminer l'abscisse commune x_0 des points M_0 et N_0 permettant d'obtenir une distance $d(x_0)$ maximale, et donner une valeur approchée à 0,1 près de la distance M_0N_0.

3. Soit Δ la droite d'équation $y = x + 2$.
On considère la fonction h dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - x - 2$.

En étudiant le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$, déterminer le nombre de points d'intersection de la droite Δ et de la courbe C_g.

Exercice B

Principaux domaines abordés :

Fonction logarithme ; dérivation.

Partie I : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \ln(x) + 2x - 2$.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et 0.
2. Déterminer le sens de variation de la fonction g sur $]0;+\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$.
4. Calculer $g(1)$ puis déterminer le signe de g sur $]0;+\infty[$.

Partie II : Étude d'une fonction f

On considère la fonction f, définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \left(2 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 1)$.

1. **a.** On admet que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa dérivée. Démontrer que, pour tout x de $]0;+\infty[$, on a :
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$
b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $]0;+\infty[$. Le calcul des limites n'est pas demandé.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de signes de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie III : Étude d'une fonction F admettant pour dérivée la fonction f

On admet qu'il existe une fonction F dérivable sur $]0;+\infty[$ dont la dérivée F' est la fonction f. Ainsi, on a : $F' = f$.

On note $\mathcal{C}_F$ la courbe représentative de la fonction F dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On ne cherchera pas à déterminer une expression de $F(x)$.

1. Étudier les variations de F sur $]0;+\infty[$.
2. La courbe représentative $\mathcal{C}_F$ de F admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Justifier la réponse.

4 Amérique du Nord - Jour 1 (21-MATJ1AN1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1 commun à tous les candidats (5 points)

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test) ;
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme. On note D l'événement « l'athlète est dopé » et T l'événement « le test est positif ». On admet que la probabilité de l'événement D est égale à $0{,}08$.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.

2. Démontrer que $P(T) = 0{,}083$.

3. **a.** Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?

b. Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'événement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à 0,95.
Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est $0{,}103$.

1. Dans cette question **1.**, on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.

a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?

2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'événement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75 ? Justifier.

Exercice 2 commun à tous les candidats (5 points)

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.
Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}6 \\ u_{n+1} = 0{,}75\, u_n(1 - 0{,}15\, u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020 + n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x) = 0{,}75x\,(1 - 0{,}15x)$.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;1]$ et dresser son tableau de variations.

3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Déterminer la limite l de la suite (u_n).

5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

b. Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-dessous :

```
def menace() :
    u=0.6
    n=0
    while u>0.02
        u=0.75*u*(1-0.15*u)
        n=n+1
    return n
```

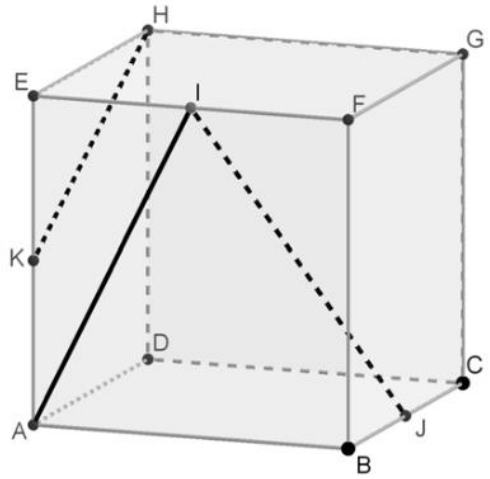
Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction **menace()**.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 commun à tous les candidats (5 points)

Les questions 1. à 5. de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $(\mathrm{A}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{AB}},\,\overrightarrow{\mathrm{AD}},\,\overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

2. **a.** Donner les coordonnées des points I et J.
   b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ sont coplanaires.

On considère le plan P d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 - 2\,t \\ z = -2 + 3t \end{cases},\ t \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + t \\ z = 8 + 2t \end{cases},\ t \in \mathbf{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan P.

5. Montrer que le point $\mathrm{L}(4, 0, 3)$ est le projeté orthogonal du point $\mathrm{M}(5, 3, 1)$ sur le plan P.

Exercice au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Exercice A

Principaux domaines abordés :

- **Fonction exponentielle**
- **Convexité**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. On justifiera chaque réponse.

Affirmation 1 : Pour tous réels a et b, $\left(\mathrm{e}^{a+b}\right)^2 = \mathrm{e}^{2a} + \mathrm{e}^{2b}$.

Affirmation 2 : Dans le plan muni d'un repère, la tangente au point A d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur **R** par $f(x) = -2 + (3 - x)\mathrm{e}^x$ admet pour équation réduite $y = 2x + 1$.

Affirmation 3 : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + \frac{3}{x} = 0$.

Affirmation 4 : L'équation $1 - x + \mathrm{e}^{-x} = 0$ admet une seule solution appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2]$.

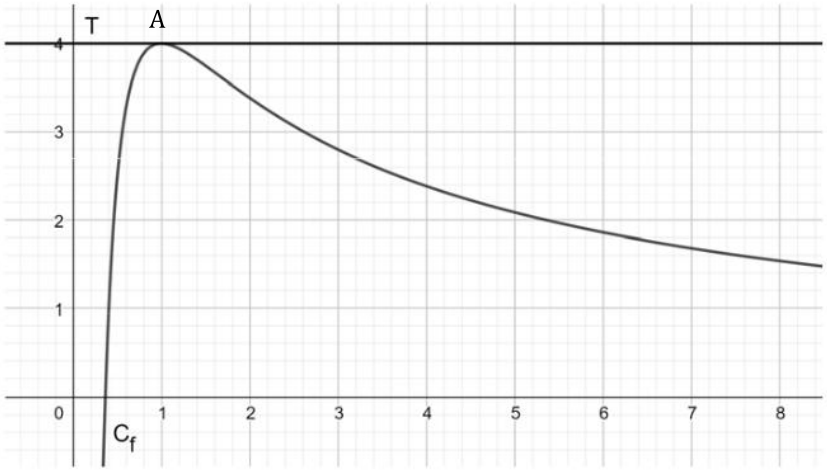
Affirmation 5 : La fonction g définie sur **R** par $g(x) = x^2 - 5x + \mathrm{e}^x$ est convexe.

Exercice B

Principaux domaines abordés :

- **Fonction logarithme népérien**
- **Convexité**

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe C_f représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. La courbe C_f admet une tangente horizontale T au point $A(1,4)$.



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}$$ où a et b sont deux nombres réels.

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b-a-b\ln x}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4+8\ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe C_f possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

5 Polynésie - Jour 2 (21-MATJ2PO1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}95\,u_n + 200.$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2 = 9\,415$.

2.

a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 4\,000.$$

b. On admet que la suite (u_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.

3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4\,000$.

a. Calculer v_0.

b. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison égale à 0,95.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0,95^n.$$

d. Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier la réponse.

4. En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.

Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.

Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».

Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays.
Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie.
Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs.
Parmi les individus sains, 1 % sont déclarés positifs.
Une personne est choisie au hasard dans la population.
On note :

- M l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2.

a. Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?

b. Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.

3. On sait que le test de la personne choisie est positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

4. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.

b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
On donnera le résultat sous forme approchée à 10^{-2} près.

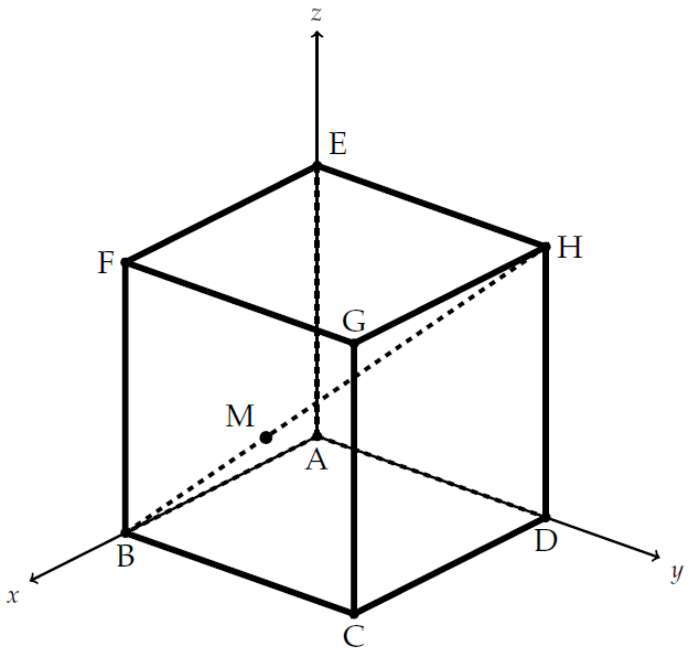
5. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur égale à 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.



1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.

2.

a. Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

b. On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

4.

a. Justifier que le vecteur $\vec{n}(-1\,;1\,;1)$ est normal au plan (EGD).

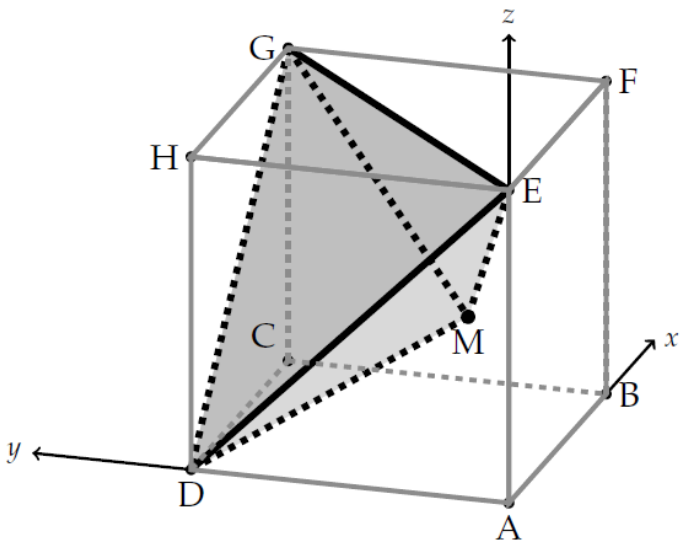
b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x+y+z-1=0$.

c. Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.

Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathcal{D}: \begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

5. Le cube ABCDEFGH est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide GEDM, en gris sur la figure :



Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide GEDM.

a. Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide GEDM issue du point M.

Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

b. En déduire le volume de la pyramide GEDM.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{b \times h}{3}$ *où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.*

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

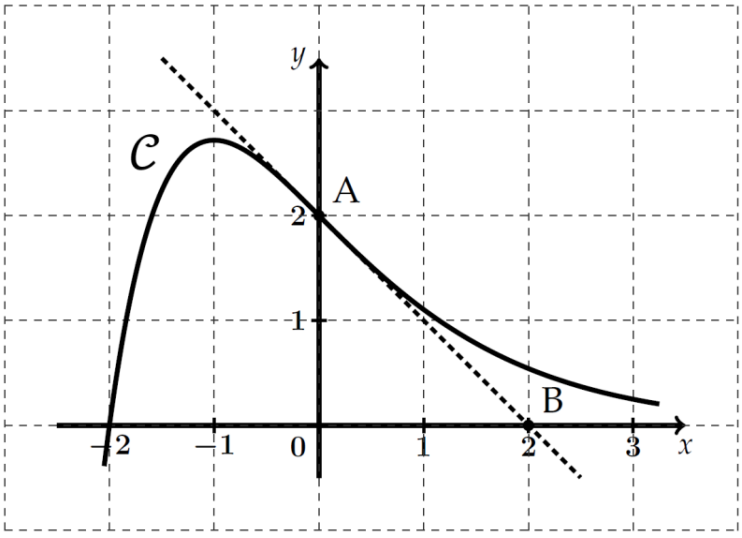
Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

EXERCICE – A

Principaux domaines abordés : Fonction exponentielle, convexité, dérivation, équations différentielles.

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur **R** :



On considère les points A(0 ; 2) et B(2 ; 0).

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.

2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle $y' = -y + \mathrm{e}^{-x}$.

On admet que $g : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).

1. Donner toutes les solutions sur **R** de l'équation différentielle $(H) : y' = -y$.

2. En déduire toutes les solutions sur **R** de l'équation différentielle (E).

3. Sachant que la fonction f est la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 2$, déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie 3

On admet que pour tout nombre réel x, $f(x) = (x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = (-x - 1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur **R**.

On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.

On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur **R**.

2. On rappelle que f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.

a. Calculer pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f''(x)$.

b. Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$?

EXERCICE – B

Principaux domaines abordés : Fonction logarithme népérien, dérivation.

Cet exercice est composé de deux parties.

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;4]$ par : $f(x) = -30x + 50 + 35\ln x$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;4]$, montrer que :

$$f'(x) = \frac{35 - 30x}{x}.$$

b. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1\,;4]$.

c. En déduire les variations de f sur ce même intervalle.

2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1\,;4]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1\,;4]$.

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1\,;4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln x.$$

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits.

On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.

2. Pour tout x de l'intervalle $[1\,;4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B.

3.

a. À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1\,;4]$.

b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.

6 Métropole - Jour 1 Session 2 (21-MATJ1ME2)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Lundi 7 juin 2021

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}.$$

On donne l'expression de la dérivée seconde f'' de f, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f''(x) = \frac{2\,\mathrm{e}^{2x}(2x^2-2x+1)}{x^3}.$$

1. La fonction f', dérivée de f, est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

a. $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}$

b. $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}(x-1)}{x^2}$

c. $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}(2x-1)}{x^2}$

d. $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}(1+2x)}{x^2}$

2. La fonction f :

a. est décroissante sur $]0 ; +\infty[$

b. est monotone sur $]0 ; +\infty[$

c. admet un minimum en $\frac{1}{2}$

d. admet un maximum en $\frac{1}{2}$

3. La fonction f admet pour limite en $+\infty$:

a. $+\infty$ **b.** 0 **c.** 1 **d.** e^{2x}

4. La fonction f :

a. est concave sur $]0 ; +\infty[$

b. est convexe sur $]0 ; +\infty[$

c. est concave sur $]0 ; \frac{1}{2}]$

d. est représentée par une courbe admettant un point d'inflexion

Exercice 2, commun à tous les candidats (5 points)

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que $5\,\%$ des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles : « positif » ou bien « négatif ».

On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.

On note $p(E)$ la probabilité d'un événement E.

On considère les événements suivants :

- D : « la pièce est défectueuse » ;
- T : « la pièce présente un test positif » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de D et T.

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- La probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle défectueuse est égale à $0{,}98$;
- La probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à $0{,}97$.

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE I

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. **a.** Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif.
b. Démontrer que : $p(T) = 0{,}0775$.

3. On appelle ***valeur prédictive positive*** du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à $0{,}95$.
Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

PARTIE II

On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.
On rappelle que : $p(D) = 0{,}05$.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse. On donnera un résultat arrondi au centième.

3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 3, commun à tous les candidats (6 points)

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.

Elle sort les gâteaux du congélateur à -19 °C et les apporte sur la terrasse où la température ambiante est de 25 °C.

Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de $1{,}3$ °C.

I - Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante, c'est-à-dire que l'augmentation de la température des gâteaux est la même minute après minute.

Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.

Ce modèle semble-t-il pertinent ?

II - Second modèle

On note T_n la température des gâteaux, en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur ; ainsi $T_0 = -19$.

On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante :

pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5$.

2. Calculer T_1 et T_2. On donnera des valeurs arrondies au dixième.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n \leq 25$.
En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?

4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n).

5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.

6. On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.
a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0.
b. En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.
c. En déduire la limite de la suite (T_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.

7. **a.** Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur. Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.

b. Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10 °C. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.

c. Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geq 10$.

```
def seuil():
    n=0
    T=......
    while T...... :
        T=......
        n=n+1
    return n
```

Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer le choix, les principaux domaines abordés sont indiqués en début de chaque exercice.

Exercice A

Principaux domaines abordés :

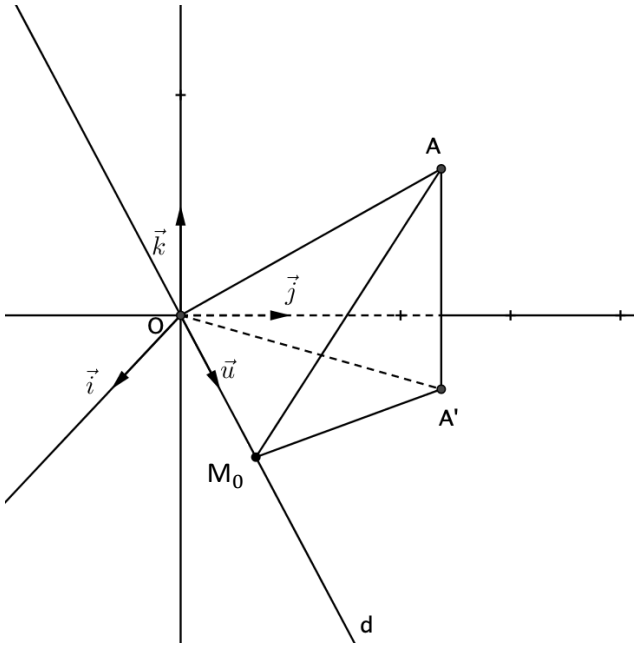
Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé ; orthogonalité dans l'espace.

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$, on considère :

- le point A de coordonnées $(1\,;3\,;2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.

On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t\,;t\,;0)$.

a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :

$$\mathrm{AM}^2 = 2t^2 - 8t + 14\,.$$

b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2\,;2\,;0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale. On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.

3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1\,;3\,;0)$.
Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(\mathrm{AA'M}_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.

5. Calculer le volume de la pyramide $\mathrm{OM}_0\mathrm{A'A}$.
On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

Exercice B

Principaux domaines abordés :

Équations différentielles ; fonction exponentielle.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = y + 2xe^x$.

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2e^x$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - u(x).$$

a. Démontrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y' = y$.
On admet que la réciproque de cette propriété est également vraie.

b. À l'aide de la résolution de l'équation différentielle $y' = y$, résoudre l'équation différentielle (E).

3. Étude de la fonction u

a. Étudier le signe de $u'(x)$ pour x variant dans $\mathbb{R}$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).

c. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave.

7 Métropole - Jour 2 Session 2 (21-MATJ2ME2)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Mardi 8 juin 2021

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et **un seul des deux exercices A ou B**.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère :

- La droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(1;1;-2)$ et $B(-1;3;2)$.
- La droite $\mathcal{D}'$ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 6 - 3t \\ z = 8 - 6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.
- Le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + m\,y - 2\,z + 8 = 0$ où m est un nombre réel.

Question 1 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite $\mathcal{D}'$?

a. $M_1(-1;3;-2)$ **b.** $M_2(11;-9;-22)$ **c.** $M_3(-7;9;2)$ **d.** $M_4(-2;3;4)$

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est :

a. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

Question 3 : Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont :

a. sécantes **b.** strictement parallèles **c.** non coplanaires **d.** confondues

Question 4 : La valeur du réel m pour laquelle la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ est :

a. $m = -1$ **b.** $m = 1$ **c.** $m = 5$ **d.** $m = -2$

Exercice 2, commun à tous les candidats (6 points)

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.
La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus.
Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.
On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.
Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les événements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
- T : « Le test du chat est positif » ;
- $\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les événements contraires des événements M et T respectivement.

1.
a. Traduire la situation par un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.

c. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à $0{,}45$.

d. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.
a. Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X.

b. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.

c. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.

d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.

a. Montrer que $p_n = 1 - 0{,}55^n$.

b. Décrire le rôle du programme ci-contre écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable P un nombre réel.

```
def seuil():
    n=0
    P=0
    while P<0.99:
        n=n+1
        P=1-0.55**n
    return n
```

c. Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.

Exercice 3, commun à tous les candidats (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}\ .$$

1. La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\frac{4}{u_n}$ (avec, pour les valeurs de u_n , affichage de deux chiffres pour les parties décimales).

n	u_n	$\frac{4}{u_n}$
0	1,00	4
1	0,80	5
2	0,67	6
3	0,57	7
4	0,50	8
5	0,44	9
6	0,40	10
7	0,36	11
8	0,33	12
9	0,31	13
10	0,29	14
11	0,27	15
12	0,25	16

À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\frac{4}{u_n}$ en fonction de n.

Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question **5.**), et d'en déduire la limite de la suite (u_n) (question **6.**).

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. Que peut-on conclure des questions **2.** et **3.** concernant la suite (u_n) ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{4}{u_n}$.

Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés dans chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :   ***Fonction logarithme ; dérivation.***

Partie I

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On admet que la fonction h est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

1. Déterminez les limites de h en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, $h'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$.

3. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]0;+\infty[$ et vérifier que : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

5. Déterminer le signe de $h(x)$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$.

Partie II

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2} \ .$$

On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0;+\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = h(x).$$

2. Déduire des résultats de la **Partie I** la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha;\alpha)$.
On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.

Exercice B

Principaux domaines abordés :

Fonction exponentielle ; dérivation ; convexité.

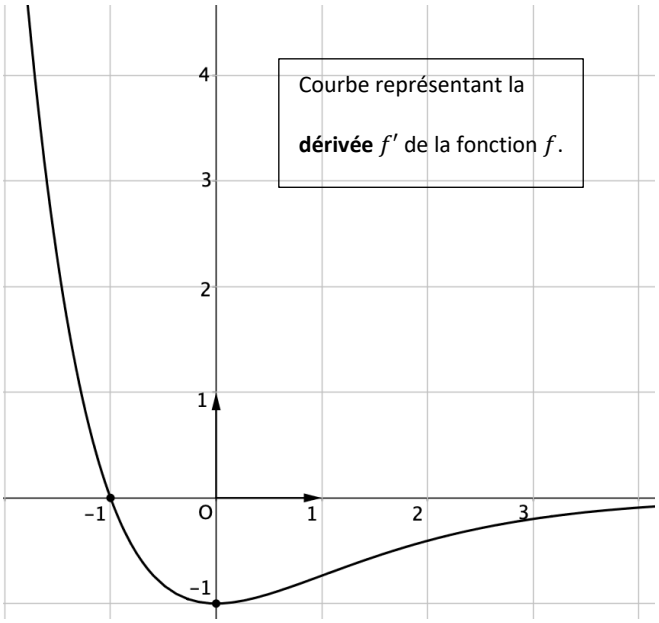
PARTIE I

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la **fonction dérivée** f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



PARTIE II

On admet que la fonction *f* mentionnée dans la **Partie I** est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x ,

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} + 2\mathrm{e}^{-x}\,.$$

En déduire la limite de *f* en $+\infty$.

Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2;-1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

3. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction *f*. Que représente pour la courbe $\mathcal{C}$ son point A d'abscisse 0 ?

8 Asie - Jour 1 (21-MATJ1JA1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Session 2021

MATHÉMATIQUES

Lundi 7 juin 2021

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte $1\,000$ abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd $10\,\%$ de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année (2020+n), suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer u_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 250$.
3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite(n) :
  u=1000
  for i in range(n) :
    u=0.9*u+250
  return u
```

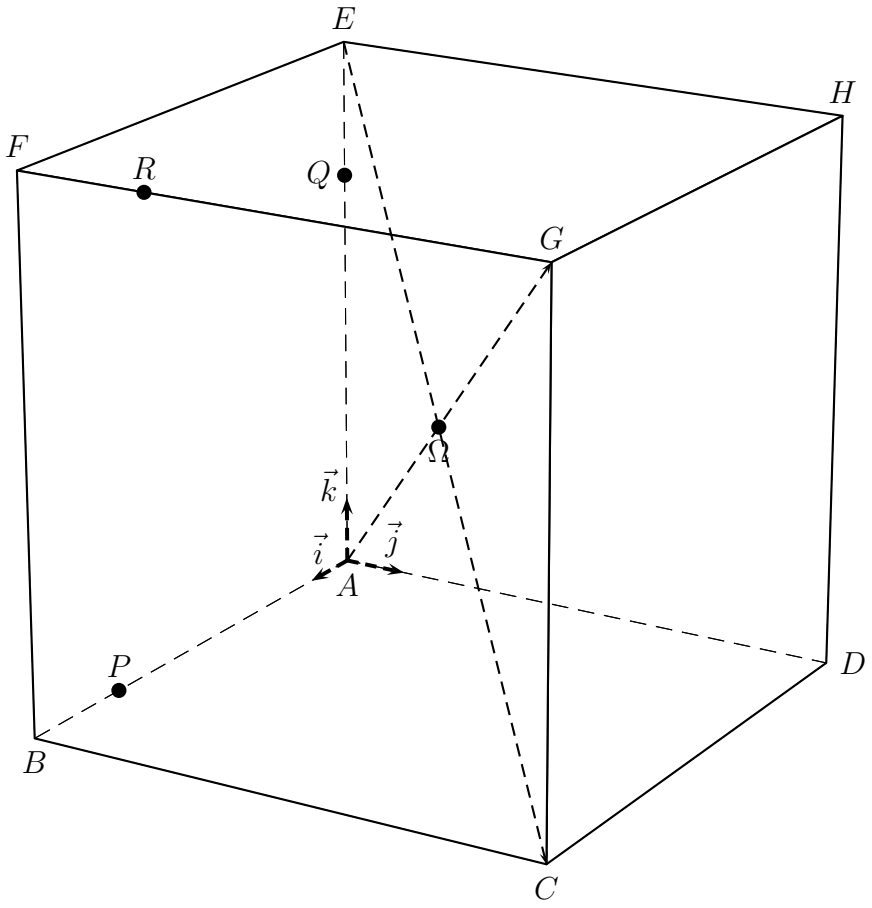
4. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leq 2\,500$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}9$ et de terme initial $v_0 = -1\,500$.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que : $u_n = -1500 \times 0{,}9^n + 2\,500$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.
6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera $2\,200$. Déterminer cette année.

EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 8 cm et de centre Ω.

Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\overrightarrow{i} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{j} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8; 2; 8)$.
   Donner les coordonnées des points P et Q.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(1; -5; 1)$ est un vecteur normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x - 5y + z - 6 = 0$.

Partie II

On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont $(4; 4; 4)$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω.
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3}; \frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right)$.
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

Un sac contient les huit lettres suivantes : A B C D E F G H (2 voyelles et 6 consonnes).

Un jeu consiste à tirer simultanément au hasard deux lettres dans ce sac. On gagne si le tirage est constitué d'une voyelle et d'une consonne.

1. Un joueur extrait simultanément deux lettres du sac.
   (a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
   (b) Déterminer la probabilité que le joueur gagne à ce jeu.

Les questions 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.
Pour la suite de l'exercice, on admet que la probabilité que le joueur gagne est égale à $\frac{3}{7}$.

2. Pour jouer, le joueur doit payer k euros, k désignant un entier naturel non nul.
   Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien.
   On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est-à-dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).
   (a) Déterminer la loi de probabilité de G.
   (b) Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ?
3. Dix joueurs font chacun une partie. Les lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.
   (b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'il y ait exactement quatre joueurs gagnants.
   (c) Calculer $P(X \geqslant 5)$ en arrondissant à 10^{-3}. Donner une interprétation du résultat obtenu.
   (d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0,9$.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

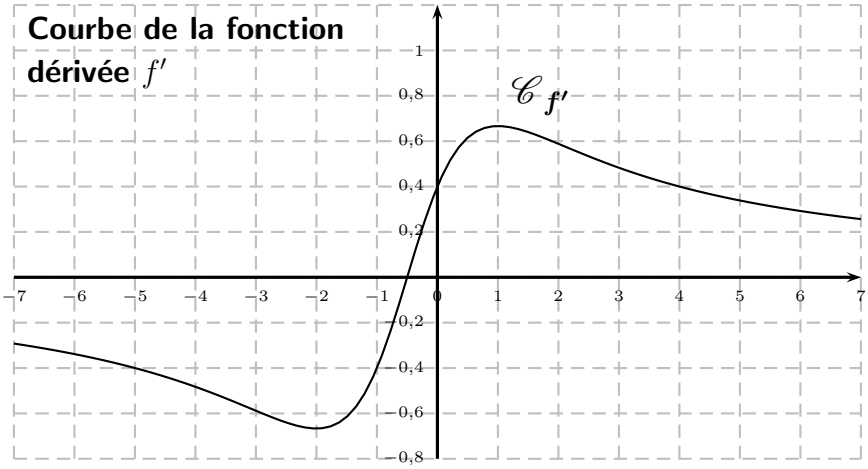
Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE - A

Principaux domaines abordés
- convexité
- fonction logarithme

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.
2. (a) Donner les variations de la fonction dérivée f'.
   (b) En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.
   (b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \dfrac{5}{2}\right)^2}$.

   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

EXERCICE - B

Principaux domaines abordés
- Étude de fonction, fonction exponentielle
- Équations différentielles

Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0{,}4y + 0{,}4$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.

1. (a) Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
2. Déterminer la fonction g, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

Partie II

Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $p(t) = \dfrac{1}{g(t)} = \dfrac{1}{1 + 9\mathrm{e}^{-0{,}4t}}$.

1. Déterminer la limite de p en $+\infty$.
2. Montrer que $p'(t) = \dfrac{3{,}6\mathrm{e}^{-0{,}4t}}{\left(1 + 9\mathrm{e}^{-0{,}4t}\right)^2}$ pour tout $t \in [0; +\infty[$.
3. (a) Montrer que l'équation $p(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.
   (b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide d'une calculatrice.

Partie III

1. p désigne la fonction de la partie II.
   Vérifier que p est solution de l'équation différentielle $y' = 0{,}4y(1-y)$ avec la condition initiale $y(0) = \dfrac{1}{10}$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$.
2. Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, $10\,\%$ des écoles ont accès à internet. Une politique volontariste d'équipement est mise en œuvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet. On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
   La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par $p(t)$.
   Interpréter dans ce contexte la limite de la question II 1 puis la valeur approchée de α de la question II 3(b) ainsi que la valeur $p(0)$.

9 Asie - Jour 2 (21-MATJ2JA1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Session 2021

MATHÉMATIQUES

Mardi 8 juin 2021

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).
Pour chaque question, trois affirmations sont proposées, une seule de ces affirmations est exacte. Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de chaque question et la lettre de la réponse choisie pour celle-ci.
AUCUNE JUSTIFICATION n'est demandée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 2x - 1)\mathrm{e}^x$.

   A. La fonction dérivée de f est la fonction définie par $f'(x) = (2x - 2)\mathrm{e}^x$.

   B. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 2]$.

   C. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

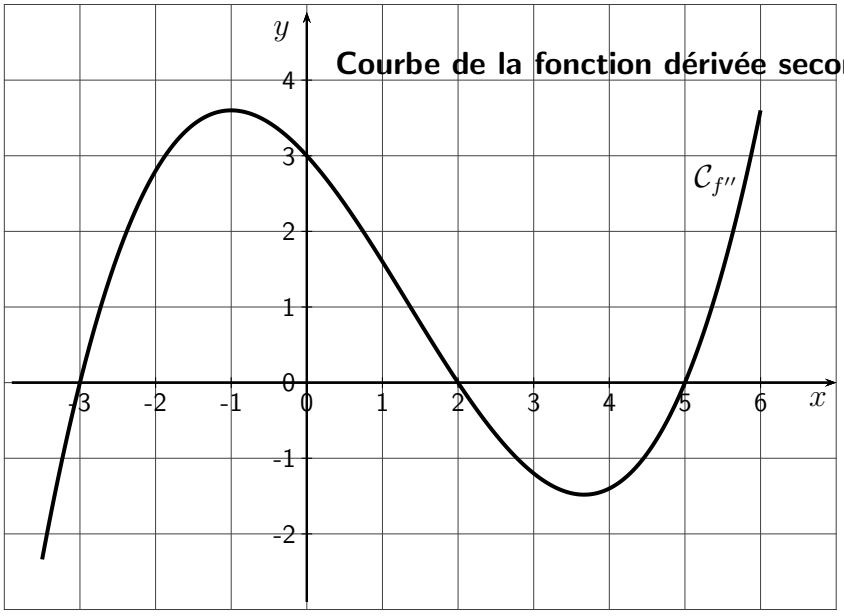
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5 + \mathrm{e}^x}$.
   Sa courbe représentative dans un repère admet :

   A. une seule asymptote horizontale ;

   B. une asymptote horizontale et une asymptote verticale ;

   C. deux asymptotes horizontales.

3. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3{,}5\,;6]$.



   A. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3\,;3]$.

   B. La fonction f admet trois points d'inflexion.

   C. La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[0\,;2]$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$.

   A. La suite (u_n) est minorée.

   B. La suite (u_n) est décroissante.

   C. L'un des termes de la suite (u_n) est égal à 2021.

5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}75u_n + 5$.
   On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python :

```
def seuil() :
  u=2
  n=0
  while u<45 :
    u=0.75*u+5
    n=n+1
  return n
```

   Cette fonction renvoie :

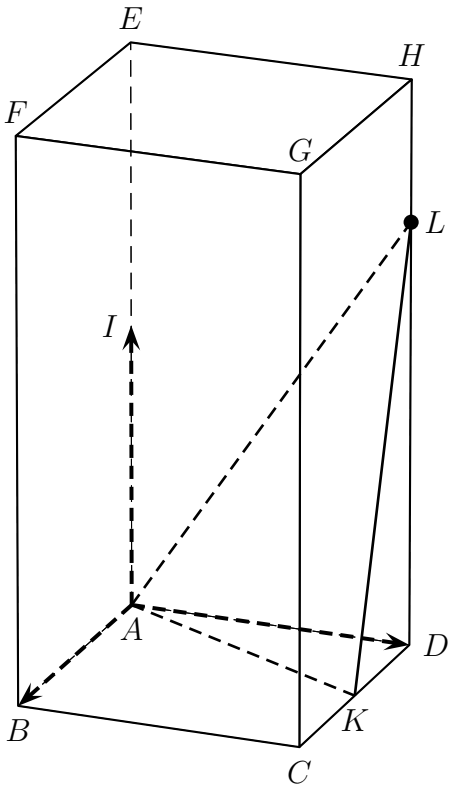
   A. la plus petite valeur de n telle que $u_n \geq 45$;

   B. la plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$;

   C. la plus grande valeur de n telle que $u_n \geq 45$.

EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = AD = 1$ et $AE = 2$, représenté ci-dessous.
Le point I est le milieu du segment $[AE]$. Le point K est le milieu du segment $[DC]$. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AI})$.
On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0; 1; \frac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.
2. (a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(6; -3; 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).
   (c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
   (d) En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49}; \frac{40}{49}; \frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

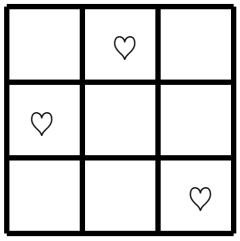
On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \textit{(aire de la base)} \times \textit{hauteur}$$

3. (a) Calculer le volume du tétraèdre $ADKL$ en utilisant le triangle ADK comme base.
   (b) Calculer la distance du point D au plan (AKL).
   (c) Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

Une société de jeu en ligne propose une nouvelle application pour smartphone nommée « Tickets coeurs ! ».
Chaque participant génère sur son smartphone un ticket comportant une grille de taille 3×3 sur laquelle sont placés trois cœurs répartis au hasard, comme par exemple ci-dessous.



Le ticket est gagnant si les trois cœurs sont positionnés côte à côte sur une même ligne, sur une même colonne ou sur une même diagonale.

1. Justifier qu'il y a exactement 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur une grille.
2. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale $\dfrac{2}{21}$.
3. Lorsqu'un joueur génère un ticket, la société prélève 1€ sur son compte en banque. Si le ticket est gagnant, la société verse alors au joueur 5€. Le jeu est-il favorable au joueur ?
4. Un joueur décide de générer 20 tickets sur cette application. On suppose que les générations des tickets sont indépendantes entre elles.
   (a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés.
   (b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'événement $(X = 5)$.
   (c) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'événement $(X \geq 1)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE - A

Principaux domaines abordés
- Suites
- Équations différentielles

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres. Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie I : modèle discret

Dans cette partie, on observe un bambou de taille initiale 1 mètre.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la taille, en mètre, du bambou n jours après le début de l'observation. On a ainsi $u_0 = 1$.
Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance du bambou entre deux jours consécutifs se traduit par l'égalité :

$$u_{n+1} = u_n + 0{,}05(20 - u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Vérifier que $u_1 = 1{,}95$.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 1$.
   (b) On pose pour tout entier naturel n, $v_n = 20 - u_n$. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme initial v_0 et la raison.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 - 19 \times 0{,}95^n$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie II : modèle continu

Dans cette partie, on souhaite modéliser la taille du même bambou Moso par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps t exprimé en jour. D'après le modèle de von Bertalanffy, cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = 0{,}05(20 - y)$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et y' désigne sa fonction dérivée.

Soit la fonction L définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $L(t) = 20 - 19e^{-0{,}05t}$.

1. Vérifier que la fonction L est une solution de (E) et qu'on a également $L(0) = 1$.
2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que, si on note L' sa fonction dérivée, $L'(t)$ représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t.
   (a) Comparer $L'(0)$ et $L'(5)$.
   (b) Calculer la limite de la fonction dérivée L' en $+\infty$. Ce résultat est-il en cohérence avec la description du modèle de croissance exposé au début de l'exercice ?

EXERCICE - B

Principaux domaines abordés
- Suites, étude de fonction
- Fonction logarithme

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x-1)$.
On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0 = 10$ et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,80277542
4	2	5,88544474
5	3	4,29918442
6	4	3,10550913
7	5	2,36095182
8	6	2,0527675
9	7	2,00134509
10	8	2,0000009

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre le calcul des valeurs approchées de (u_n) par recopie vers le bas ?
2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Partie II :

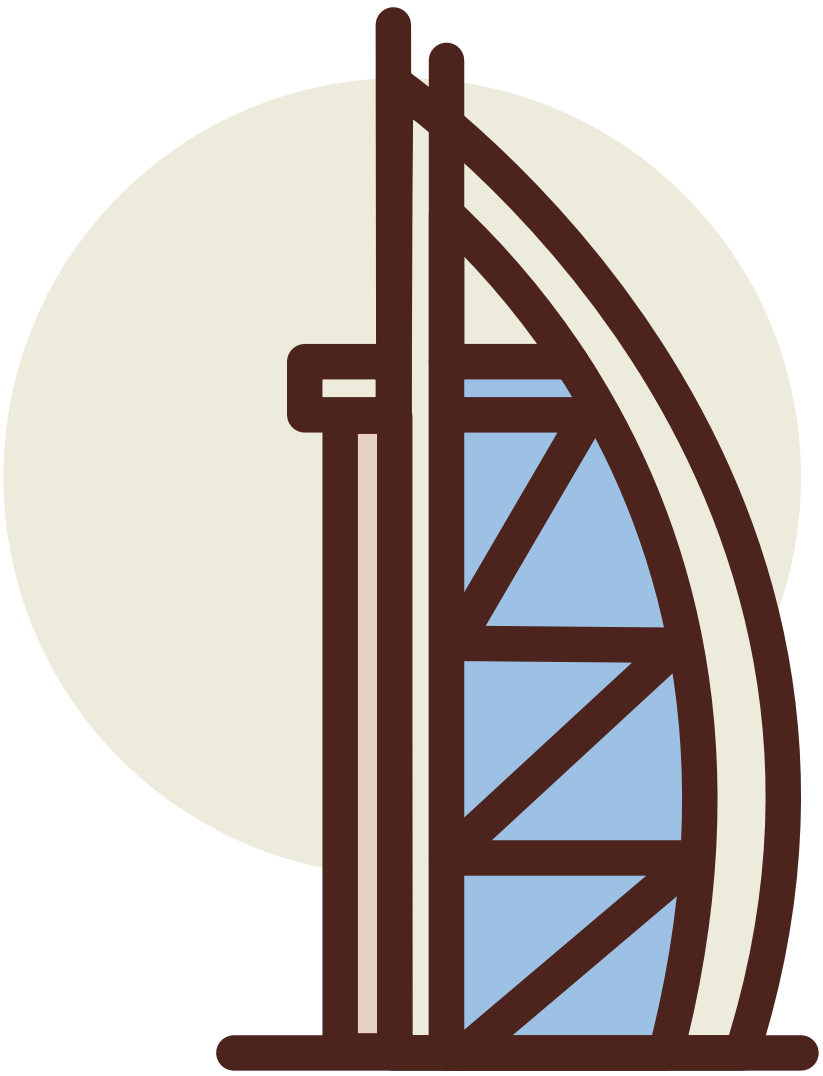
On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(x-1)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. On admettra que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
2. (a) Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $x \in]1\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.
   (b) En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$, complété par les limites.
   (c) Justifier que pour tout $x \geq 2$, $f(x) \geq 2$.

Partie III :

1. En utilisant les résultats de la partie II, démontrer par récurrence que $u_n \geq 2$ pour tout entier naturel n.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note L sa limite.
4. On admet que L vérifie $f(L) = L$. Donner la valeur de L.

10 Centres Étrangers - Jour 1 (21-MATJ1G11)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé..

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la réponse correspondante. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

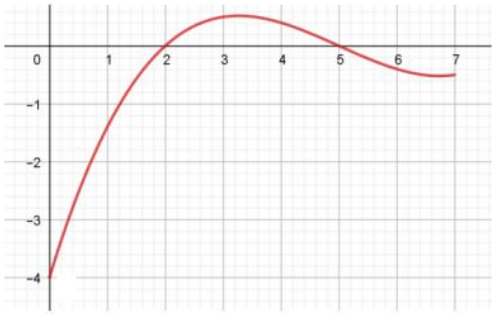
1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-2x}$. On note f'' la dérivée seconde de la fonction f.
Quel que soit le réel x, $f''(x)$ est égal à :

a. $(1-2x)e^{-2x}$
b. $4(x-1)e^{-2x}$
c. $4e^{-2x}$
d. $(x+2)e^{-2x}$

2. Un élève de première générale choisit trois spécialités parmi les douze proposées.
Le nombre de combinaisons possibles est :

a. 1 728
b. 1 320
c. 220
d. 33

3. On donne ci-dessous la représentation graphique de f' fonction dérivée d'une fonction f définie sur $[0\,;7]$.



Le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0\,;7]$ est :

a.

x	0		3,25		7
$f(x)$		↗		↘	

b.

x	0		2		5		7
$f(x)$		↘		↗		↘	

c.

x	0		2		5		7
$f(x)$		↗		↘		↗	

d.

x	0		2		7
$f(x)$		↗		↘	

4. Une entreprise fabrique des cartes à puces. Chaque puce peut présenter deux défauts notés A et B.
Une étude statistique montre que $2{,}8\ \%$ des puces ont le défaut A, $2{,}2\ \%$ des puces ont le défaut B et, heureusement, $95{,}4\ \%$ des puces n'ont aucun des deux défauts.

La probabilité qu'une puce prélevée au hasard ait les deux défauts est :

- **a.** $0{,}05$
- **b.** $0{,}004$
- **c.** $0{,}046$
- **d.** On ne peut pas le savoir

5. On se donne une fonction f, supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.

On donne ci-dessous le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

D'après ce tableau de variation :

- **a.** f' est positive sur $\mathbb{R}$
- **b.** f' est positive sur $]-\infty\,;\,-1]$
- **c.** f' est négative sur $\mathbb{R}$
- **d.** f' est positive sur $[-1\,;\,+\infty[$

EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3}.

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française. Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

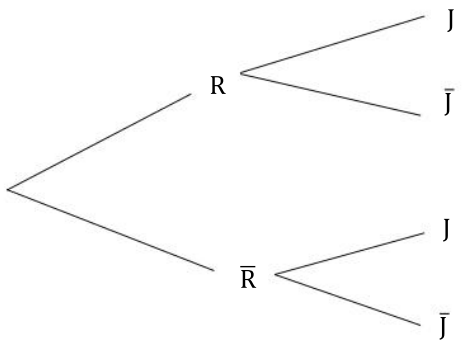
(Source : TNS-Sofres)

Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :

- R l'événement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J l'événement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopierez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.



2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.

3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.
Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.

4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B :

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun. La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.

Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.

2. Calculer $\mathrm{P}(X = 5)$ et interpréter le résultat.

3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses $5\ 000$ collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que $85\ \%$ de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.

2. Justifier que pour tout entier naturel n,
$$a_{n+1} = 0,85a_n + 450$$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$v_n = a_n - 3\ 000$$
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   b. Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n,
$$a_n = -2\ 800 \times 0,85^n + 3\ 000$$

4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à $2\ 500$, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$
où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$$

b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n,

$$0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE A - Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :
$\mathrm{A}(2\,;\,-1\,;\,0)$; $\mathrm{B}(3\,;\,-1\,;2)$; $\mathrm{C}(0\,;4\,;1)$ et $\mathrm{S}(0\,;1\,;4)$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

b. Montrer que les coordonnées du point H sont $\mathrm{H}(2\,;2\,;3)$.

4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $\mathrm{V} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.
Calculer le volume du tétraèdre SABC.

5. a. Calculer la longueur SA.

b. On indique que $\mathrm{SB} = \sqrt{17}$.
En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

EXERCICE B - Équations différentielles

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2$$

1. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée. Montrer que, pour tout réel x :
$$g'(x) = \frac{-2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}$$
2. En déduire le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le signe de $g(x)$, pour tout x réel.

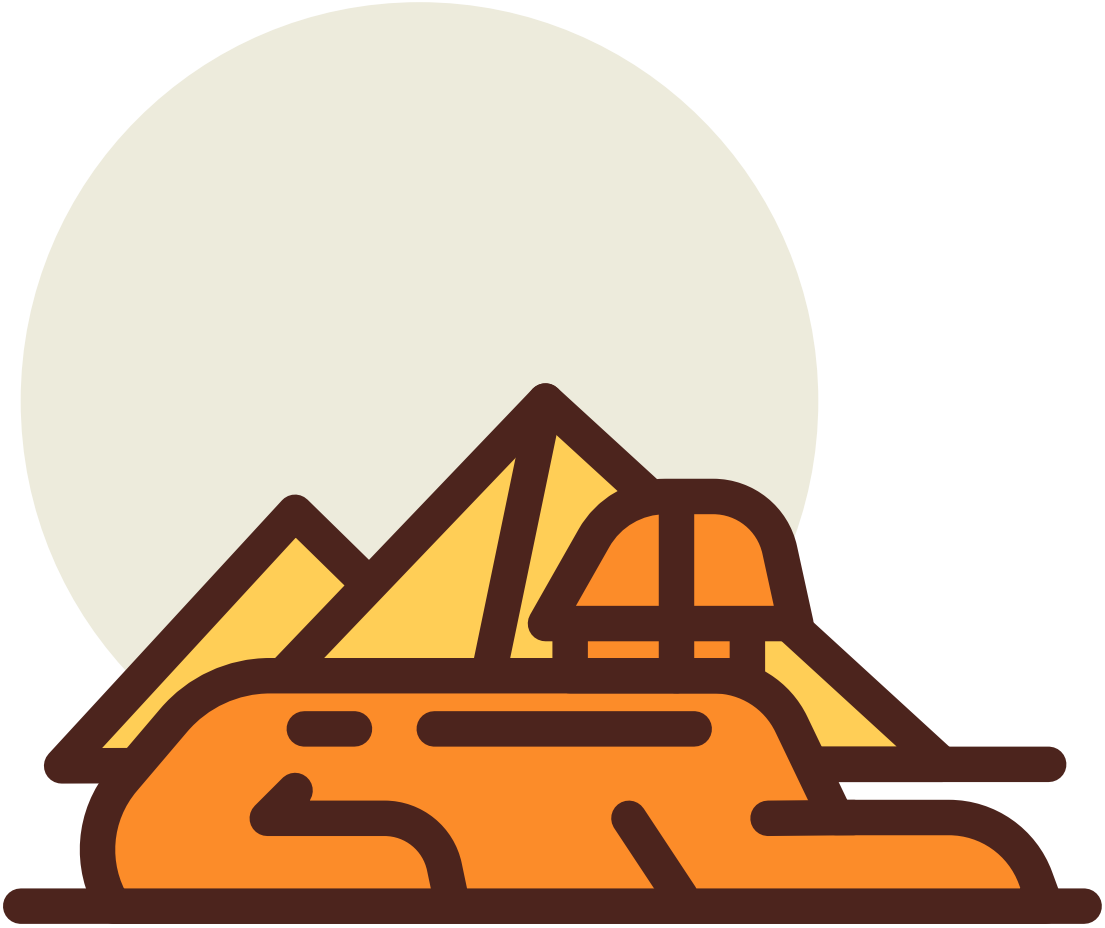
Partie B :

1. On considère l'équation différentielle
$$(\mathrm{E}): \quad 3y' + y = 0$$
Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, dans un repère du plan, passe par le point $M(0\,;2)$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$
et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
   a. Montrer que la tangente (Δ_0) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $M(0\,;2)$ admet une équation de la forme :
$$y = -\frac{2}{3}x + 2$$
   b. Étudier, sur $\mathbb{R}$, la position de cette courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente (Δ_0).

Partie C :

1. Soit A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a, a réel quelconque.
Montrer que la tangente (Δ_a) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse $a + 3$.
2. Expliquer la construction de la tangente (Δ_{-2}) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse -2.

11 Centres Étrangers - Jour 2 (21-MATJ2G11)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé..

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des cinq questions, quatre réponses sont proposées ; une seule de ces réponses est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte sans justifier le choix effectué.

Barème : une bonne réponse rapporte un point. Une réponse inexacte ou une absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Question 1 :

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=x^2+2x-\frac{3}{x}$.
Une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 est :

a. $y=7(x-1)$	**c.** $y=7x+7$
b. $y=x-1$	**d.** $y=x+1$

Question 2 :

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\frac{3n}{n+2}$. On cherche à déterminer la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=1$	**c.** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\frac{3}{2}$
b. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=3$	**d.** On ne peut pas la déterminer

Question 3 :

Dans une urne il y a 6 boules noires et 4 boules rouges. On effectue successivement 10 tirages aléatoires avec remise. Quelle est la probabilité (à 10^{-4} près) d'avoir 4 boules noires et 6 boules rouges ?

a. $0{,}1662$	**c.** $0{,}1115$
b. $0{,}4$	**d.** $0{,}8886$

Question 4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3e^x-x$.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$	**c.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	**d.** On ne peut pas déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$

Question 5 :

Un code inconnu est constitué de 8 signes. Chaque signe peut être une lettre ou un chiffre. Il y a donc 36 signes utilisables pour chacune des positions.

Un logiciel de cassage de code teste environ cent millions de codes par seconde.

En combien de temps au maximum le logiciel peut-il découvrir le code ?

a. environ 0.3 seconde	**c.** environ 3 heures
b. environ 8 heures	**d.** environ 470 heures

EXERCICE 2 commun à tous les candidats (5 points)

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait $10\,560$ panneaux solaires. On observe, chaque année, que $2\,\%$ des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10\,560$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2020 + n$.

1.

a) Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.

b) On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à $12\,000$. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

c) Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n = 0
while ..... :
    u = .....
    n = .....
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq 12\,500$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. En déduire que la suite (u_n) converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.

5. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12\,500$, pour tout entier naturel n.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0{,}98$ dont on précisera le premier terme.

b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c) En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

d) Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

<u>Partie B</u> - Modélisation à l'aide d'une fonction

Une modélisation plus précise a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires de la centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 12500 - 500\,\mathrm{e}^{-0{,}02x+1{,}4}$, où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. En utilisant ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires dépassera $12\,000$.

EXERCICE 3 commun à tous les candidats (5 points)

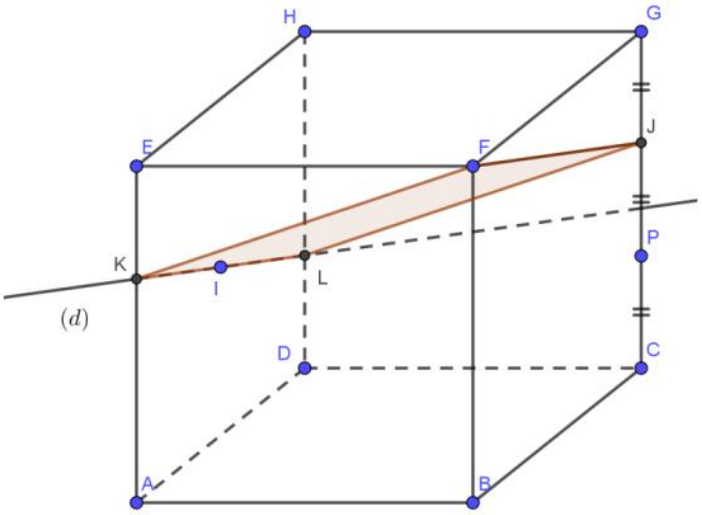
ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face ADHE et J est un point du segment [CG]. Il existe donc $a \in [0\,;1]$ tel que $\overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG}$.

On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ).

On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).

On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.

Partie A : Dans cette partie $a = \frac{2}{3}$



1. Donner les coordonnées des points F, I et J.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (*d*).
3. **a)** Montrer que le point de coordonnées $\left(0\,;\ 0\,;\ \frac{2}{3}\right)$ est le point K.
   b) Déterminer les coordonnées du point L, intersection des droites (d) et (DH).
4. **a)** Démontrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.
   b) Démontrer que le quadrilatère FJLK est un losange.
   c) Le quadrilatère FJLK est-il un carré ?

Partie B : Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont : $K\left(0; 0; 1 - \frac{a}{2}\right)$ et $L\left(0; 1; \frac{a}{2}\right)$.
On rappelle que $a \in [0\,;1]$.

1. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a.
2. Montrer que le quadrilatère FJLK est un parallélogramme.
3. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère FJLK soit un losange ? Justifier.
4. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère FJLK soit un carré ? Justifier.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

EXERCICE A - Fonction ln

Partie A :

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de $0{,}05$. On possède un test de dépistage de cette maladie.
On considère un échantillon de n personnes ($n \geq 20$) prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.

On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces *n* individus, on teste le mélange. Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.
Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Montrer X_n prend les valeurs 1 et $(n+1)$.

2. Prouver que $P(X_n = 1) = 0{,}95^n$.

Établir la loi de X_n en recopiant sur la copie et en complétant le tableau suivant :

x_i	1	$n+1$
$P(X_n = x_i)$		

3. Que représente l'espérance de X_n dans le cadre de l'expérience ?

Montrer que $E(X_n) = n + 1 - n \times 0{,}95^n$.

Partie B :

1. On considère la fonction f définie sur $[20;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x\ln(0{,}95)$

Montrer que f est décroissante sur $[20;\ +\infty[$.

2. On rappelle $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

3. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[20;\ +\infty[$.

Donner un encadrement à $0{,}1$ près de cette solution.

4. En déduire le signe de f sur $[20;\ +\infty[$.

Partie C:

On cherche à comparer deux types de dépistages. La première méthode est décrite dans la partie A, la seconde, plus classique, consiste à tester tous les individus.
La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E(X_n) < n$.

En utilisant la partie B, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.

EXERCICE B - Équation différentielle

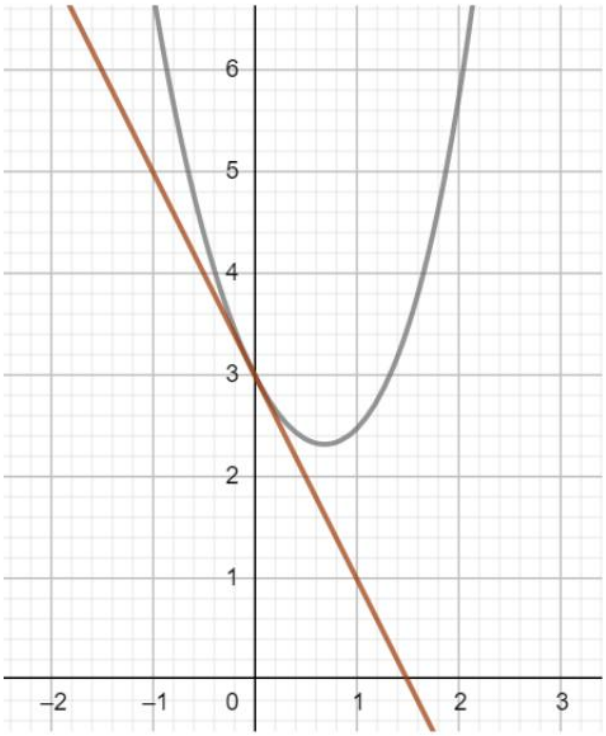
Partie A : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} + ax + b\mathrm{e}^{-x}$$

où *a* et *b* sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.

Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. En utilisant l'expression de la fonction f, exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.
   b. Exprimer $f'(0)$ en fonction de a.
   c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression de $f(x)$.
4. On considère l'équation différentielle :
   (E) : $y' + y = 2\mathrm{e}^{x} - x - 1$
   a. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = \mathrm{e}^{x} - x + 2\mathrm{e}^{-x}$$
   est solution de l'équation (E).
   b. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.
   c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

<u>Partie B</u> : Étude de la fonction g sur $[1\,;\,+\infty[$

1. Vérifier que pour tout réel x, on a :

$$e^{2x} - e^{x} - 2 = (e^{x} - 2)(e^{x} + 1)$$

2. En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x.

3. On admettra que, pour tout $x \in [1\,;\,+\infty[$, $e^{x} - 2 > 0$.
Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[1\,;\,+\infty[$.

12 Métropole - Jour 1 Remplacement (21-MATJ1ME3)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.
La page 8/8 est une **annexe à rendre avec la copie** par les élèves ayant choisi de traiter **l'exercice A**.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

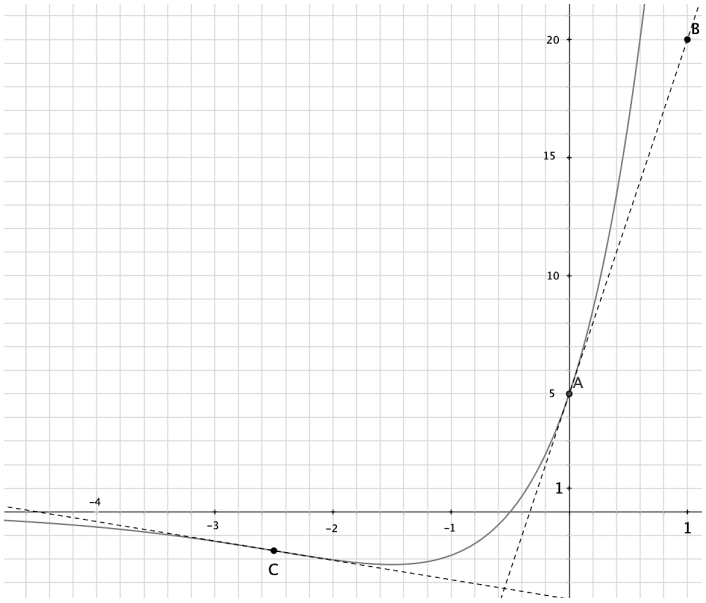
Le graphique ci-contre donne la représentation graphique C_f dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On notera f' la fonction dérivée de f.

On donne les points A de coordonnées (0 ; 5) et B de coordonnées (1 ; 20). Le point C est le point de la courbe C_f ayant pour abscisse $-2{,}5$.

La droite (AB) est la tangente à la courbe C_f au point A.

Les questions **1** à **3** se rapportent à cette même fonction f.



1.
On peut affirmer que :

a. $f'(-0{,}5) = 0$

b. si $x \in]-\infty; -0{,}5[$, alors $f'(x) < 0$

c. $f'(0) = 15$

d. la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$

2. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0{,}5; 0)$.

On peut affirmer que :

a. $a = 10$ et $b = 5$ **b.** $a = 2{,}5$ et $b = -0{,}5$ **c.** $a = -1{,}5$ et $b = 5$ **d.** $a = 0$ et $b = 5$

3. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = (10x + 25)e^x$$

On peut affirmer que :

a. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$

b. La fonction f est concave sur $\mathbb{R}$

c. Le point C est l'unique point d'inflexion de C_f

d. C_f n'admet pas de point d'inflexion

4. On considère deux suites (U_n), (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :

- pour tout entier naturel n, $U_n \leq V_n$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 2$.

On peut affirmer que :

a. la suite (U_n) converge

b. pour tout entier naturel n, $V_n \leq 2$

c. la suite (U_n) diverge

d. la suite (U_n) est majorée

Exercice 2, commun à tous les candidats (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1 .

2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

3. **a.** Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < \mathrm{E}$.

```
def seuil(E):
    u=0.5
    n=0
    while ..... :
        u=...
        n=n+1
    return n
```

b. Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $\mathrm{E} = 10^{-4}$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n} .$$

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4 .

En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \frac{v_n}{v_n+1}$.

c. Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1+0{,}25^n} .$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).

Exercice 3, commun à tous les candidats (6 points)

Dans le parc national des Pyrénées, un chercheur travaille sur le déclin d'une espèce protégée dans les lacs de haute-montagne : le « crapaud accoucheur ».

Les parties I et II peuvent être abordées de façon indépendante.

Partie I : Effet de l'introduction d'une nouvelle espèce.

Dans certains lacs des Pyrénées, des truites ont été introduites par l'homme afin de permettre des activités de pêche en montagne. Le chercheur a étudié l'impact de cette introduction sur la population de crapauds accoucheurs d'un lac. Ses études précédentes l'amènent à modéliser l'évolution de cette population en fonction du temps par la fonction f suivante :

$$f(t) = (0{,}04t^2 - 8t + 400)\,\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} + 40 \text{ pour } t \in [0; 120]$$

La variable t représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant t .

1. Déterminer le nombre de crapauds présents dans le lac lors de l'introduction des truites.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 120]$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer, en faisant apparaitre les étapes du calcul, que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0; 120]$ on a : $f'(t) = t(t - 100)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} \times 8 \times 10^{-4}$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 120\ ]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle (on donnera des valeurs approchées au centième).

4. Selon cette modélisation :

a. Déterminer le nombre de jours J nécessaires afin que le nombre de crapauds atteigne son minimum. Quel est ce nombre minimum ?

b. Justifier que, après avoir atteint son minimum, le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus.

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus ?

Partie II : Effet de la Chytridiomycose sur une population de têtards.

Une des principales causes du déclin de cette espèce de crapaud en haute montagne est une maladie, la «Chytridiomycose », provoquée par un champignon.

Le chercheur considère que :

- Les trois quarts des lacs de montagne des Pyrénées ne sont pas infectés par le champignon, c'est-à-dire qu'ils ne contiennent aucun têtard (larve du crapaud) contaminé.
- Dans les lacs restants, la probabilité qu'un têtard soit contaminé est de $0{,}74$.

Le chercheur choisit au hasard un lac des Pyrénées, et y procède à des prélèvements.

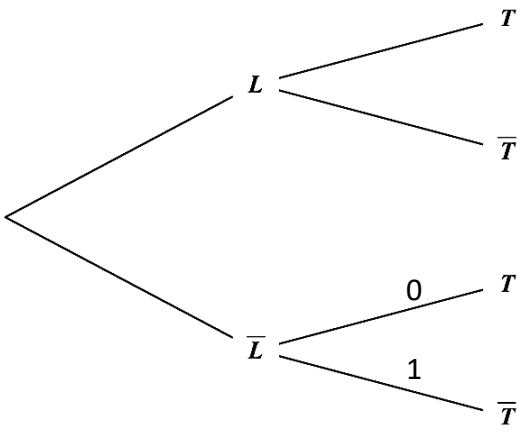
Pour la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième lorsque cela est nécessaire.

Le chercheur prélève au hasard un têtard du lac choisi afin d'effectuer un test avant de le relâcher.

On notera T l'événement « Le têtard est contaminé par la maladie » et L l'événement « Le lac est infecté par le champignon ».

On notera $\overline{L}$ l'événement contraire de L et $\overline{T}$ l'événement contraire de T.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'énoncé :



2. Montrer que la probabilité $P(T)$ que le têtard prélevé soit contaminé est de $0{,}185$.

3. Le têtard n'est pas contaminé. Quelle est la probabilité que le lac soit infecté ?

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :

Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé.

On considère le cube ABCDEFGH donné en annexe.
On donne trois points I, J, et K vérifiant :

$$\overrightarrow{\mathrm{EI}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{EH}}\,; \qquad \overrightarrow{\mathrm{EJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{EF}}\,; \qquad \overrightarrow{\mathrm{BK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BF}}.$$

Les points I, J et K sont représentés sur la **figure donnée en annexe**, **à compléter et à rendre avec la copie**.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\,,\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.

2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est normal au plan (IJK).

3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $4x + 4y + 4z - 5 = 0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).

5. En déduire les coordonnées du point L, point d'intersection de la droite (BC) avec le plan (IJK).

6. Sur la figure en annexe, placer le point L et construire l'intersection du plan (IJK) avec la face (BCGF).

7. Soit $\mathrm{M}\left(\frac{1}{4}\,;1\,;0\right)$. Montrer que les points I, J, L et M sont coplanaires.

Exercice B

Principaux domaines abordés :

Fonction logarithme.

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en 0.

2. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.

3. On note h' la fonction dérivée de h. Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\,;+\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

5. Démontrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$.

Justifier que l'on a : $0{,}5<\alpha<0{,}6$.

Partie II

Dans cette partie, on considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

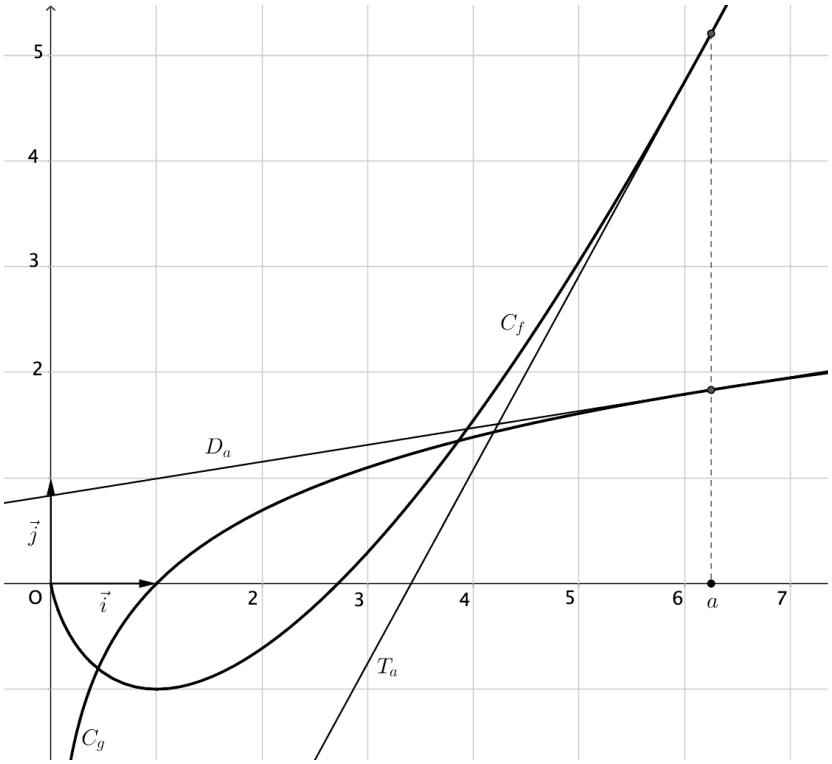
$$f(x)=x\ln(x)-x\,; \qquad g(x)=\ln(x).$$

On note C_f et C_g les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Pout tout nombre réel a strictement positif, on appelle :

- T_a la tangente à C_f en son point d'abscisse a ;
- D_a la tangente à C_g en son point d'abscisse a.

Les courbes C_f et C_g ainsi que deux tangentes T_a et D_a sont représentées ci-dessous.



On recherche d'éventuelles valeurs de a pour lesquelles les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

1. Justifier que la droite D_a a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{a}$.

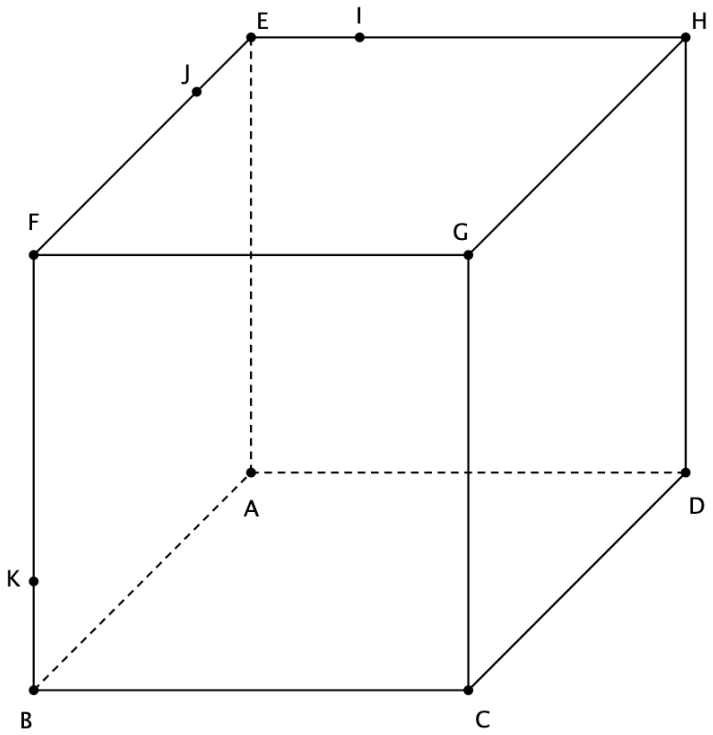
2. Justifier que la droite T_a a pour coefficient directeur $\ln(a)$.

On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si et seulement si $mm'=-1$.

3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de a, que l'on identifiera, pour laquelle les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

ANNEXE A COMPLETER ET A RENDRE AVEC LA COPIE

À COMPLÉTER SEULEMENT PAR LES ÉLÈVES AYANT CHOISI DE TRAITER L'EXERCICE A.



Modèle CMEN-DOC v3 A4 ©NEOPTEC

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Inscription :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

13 Métropole - Jour 2 Remplacement (21-MATJ2ME3)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2021

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

La page 7 est une annexe, à compléter et à rendre avec la copie.

Le candidat traite **4 exercices :** les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et un seul des deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1, commun à tous les candidats (4 points)

Une entreprise reçoit quotidiennement de nombreux courriels (courriers électroniques).

Parmi ces courriels, 8% sont du « spam », c'est-à-dire des courriers à intention publicitaire, voire malveillante, qu'il est souhaitable de ne pas ouvrir.

On choisit au hasard un courriel reçu par l'entreprise.

Les propriétés du logiciel de messagerie utilisé dans l'entreprise permettent d'affirmer que :

- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que c'est un spam est égale à 0,9.
- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que ce n'est pas un spam est égale à 0,01.

On note :

- S l'événement « le courriel choisi est un spam » ;
- I l'événement « le courriel choisi est classé comme indésirable par le logiciel de messagerie ».
- $\bar{S}$ et $\bar{I}$ les événements contraires de S et I respectivement.

1. Modéliser la situation étudiée par un arbre pondéré, sur lequel on fera apparaître les probabilités associées à chaque branche.

2.

a. Démontrer que la probabilité que le courriel choisi soit un message de spam et qu'il soit classé indésirable est égale à 0,072.

b. Calculer la probabilité que le message choisi soit classé indésirable.

c. Le message choisi est classé comme indésirable. Quelle est la probabilité que ce soit effectivement un message de spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.

3. On choisit au hasard 50 courriels parmi ceux reçus par l'entreprise. On admet que ce choix se ramène à un tirage au hasard avec remise de 50 courriels parmi l'ensemble des courriels reçus par l'entreprise.

On appelle Z la variable aléatoire dénombrant les courriels de spam parmi les 50 choisis.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z, et quels sont ses paramètres ?

b. Quelle est la probabilité que, parmi les 50 courriels choisis, deux au moins soient du spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.

Exercice 2, commun à tous les candidats (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points $A(1;0;2)$, $B(2;1;0)$, $C(0;1;2)$ et la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+t \\ z = 4-t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

1. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

Réponse A : $M(2\,;1\,;-1)$; **Réponse B :** $N(-3\,;-4\,;6)$;

Réponse C : $P(-3\,;-4\,;2)$; **Réponse D :** $Q(-5\,;-5\,;1)$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées :

Réponse A : $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$; **Réponse B :** $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; **Réponse C** : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; **Réponse D** : $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

Réponse A : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$; **Réponse B :** $\begin{cases} x = 2-t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$;

Réponse C : $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$; **Réponse D :** $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 2-2t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

4. Une équation cartésienne du plan passant par le point C et orthogonal à la droite Δ est :

Réponse A : $x-2y+4z-6=0$; **Réponse B :** $2x+y-z+1=0$;

Réponse C : $2x+y-z-1=0$; **Réponse D :** $y+2z-5=0$.

5. On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

Réponse A : $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sont coplanaires ; **Réponse B :** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;

Réponse C : D a pour coordonnées $(3;-1;-1)$; **Réponse D :** les points A, B, C et D sont alignés.

Exercice 3, commun à tous les candidats (sur 6 points)

Partie I

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}$.
On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur **R** et dresser son tableau de variation.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur **R**, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

4. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie II

Dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur **R** par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ (qui représente la fonction f de la **Partie I**) sont tracées **sur le graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie.**

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathscr{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point.

1. Pour tout nombre réel t, on note M le point de coordonnées $(t\,;\, e^{-t})$ de la courbe $\mathscr{C}$.
On considère la fonction h qui, au nombre réel t, associe la distance OM.
On a donc : $h(t) = \mathrm{OM}$, c'est-à-dire :

$$h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}\,.$$

a. Montrer que, pour tout nombre réel t,

$$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}$$

.

où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

b. Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha\,;\, \mathrm{e}^{-\alpha})$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale. Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

2. On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.
a. Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T.

On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}$.
On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :

Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à –1.

b. Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires. Tracer ces droites sur le

graphique donné en annexe, **à rendre avec la copie**.

EXERCICE au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés dans chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A

Principaux domaines abordés :
Suites numériques ; raisonnement par récurrence.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 16\,; \quad v_0 = 5;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.

a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $0{,}1$.

En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de w_n en fonction de n.

b. Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.

3.

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -0{,}4\, w_n$.

b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geq v_0 = 5$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 5$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle l la limite de (u_n).

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle l' la limite de (v_n).

4.

a. Démontrer que $l = l'$.

b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.

Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1} = c_n$.

En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 100$.

c. Déterminer la valeur commune des limites l et l'.

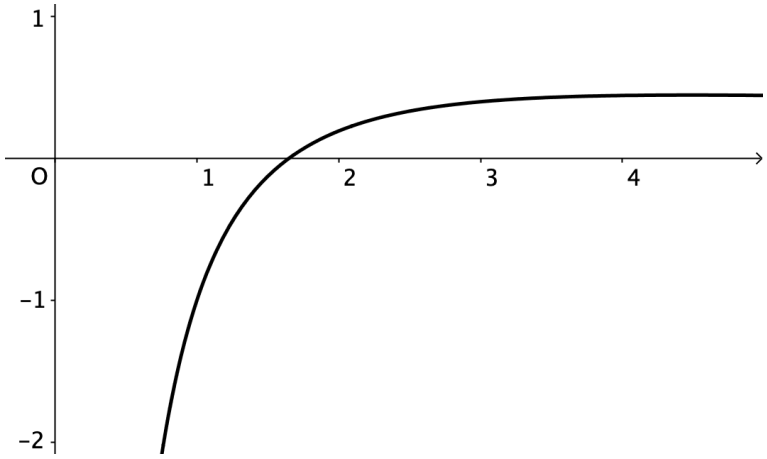
Exercice B

Principaux domaines abordés :
Fonction logarithme, limites, dérivation.

Partie I

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}$$



1. Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$.

On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième.

2. Préciser, par lecture graphique, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle]0 ;+∞[.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x).$$

1.

a. Déterminer la limite de la fonction g en 0.

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0; +\infty[$, on a : $g'(x) = f(x)$, où f désigne la fonction définie dans la **Partie I**.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

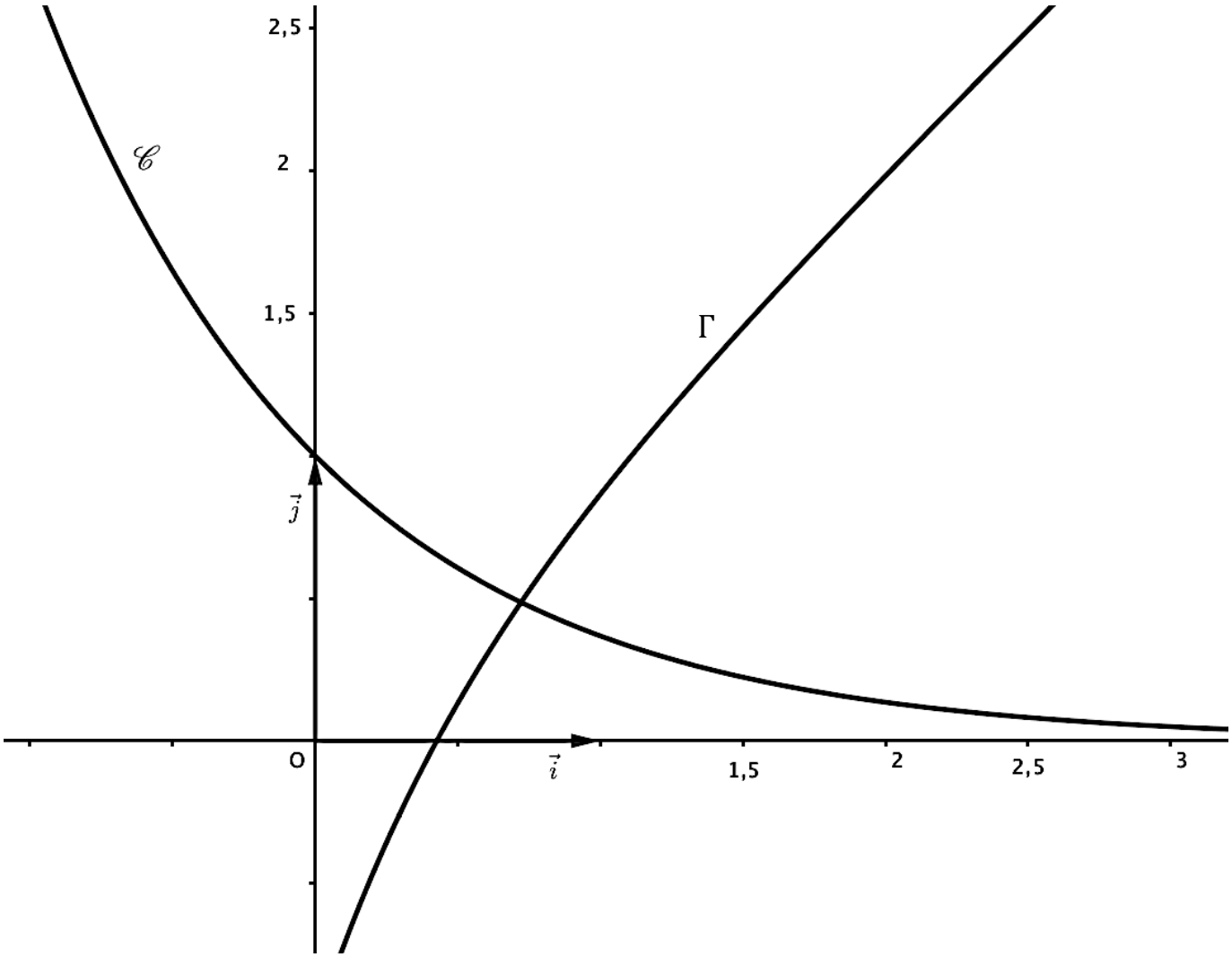
On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur du minimum de g sur $]0; +\infty[$.

4. Démontrer que, pour tout nombre réel $m > -0{,}25$, l'équation $g(x) = m$ admet exactement deux solutions.

5. Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Exercice 3



Modèle CMEN-DOC v3 A4 ©NEOPTEC

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

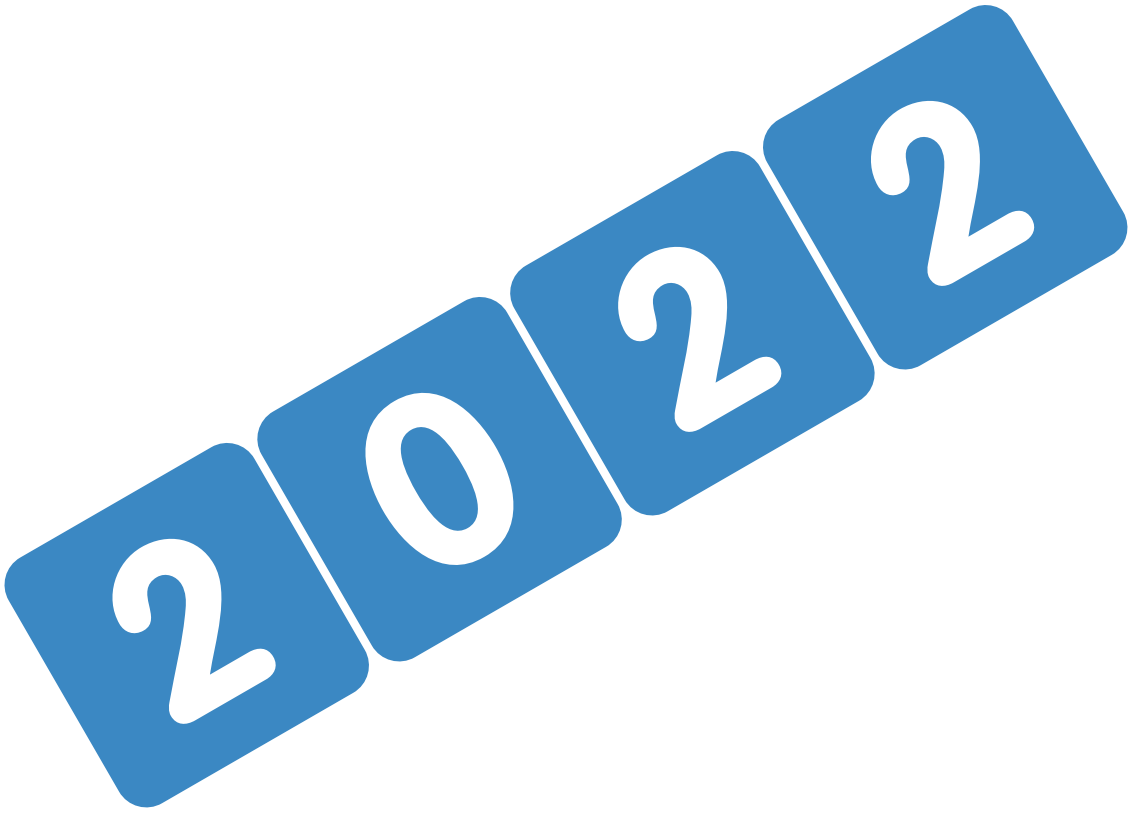
Numéro Inscription :

Né(e) le : / /

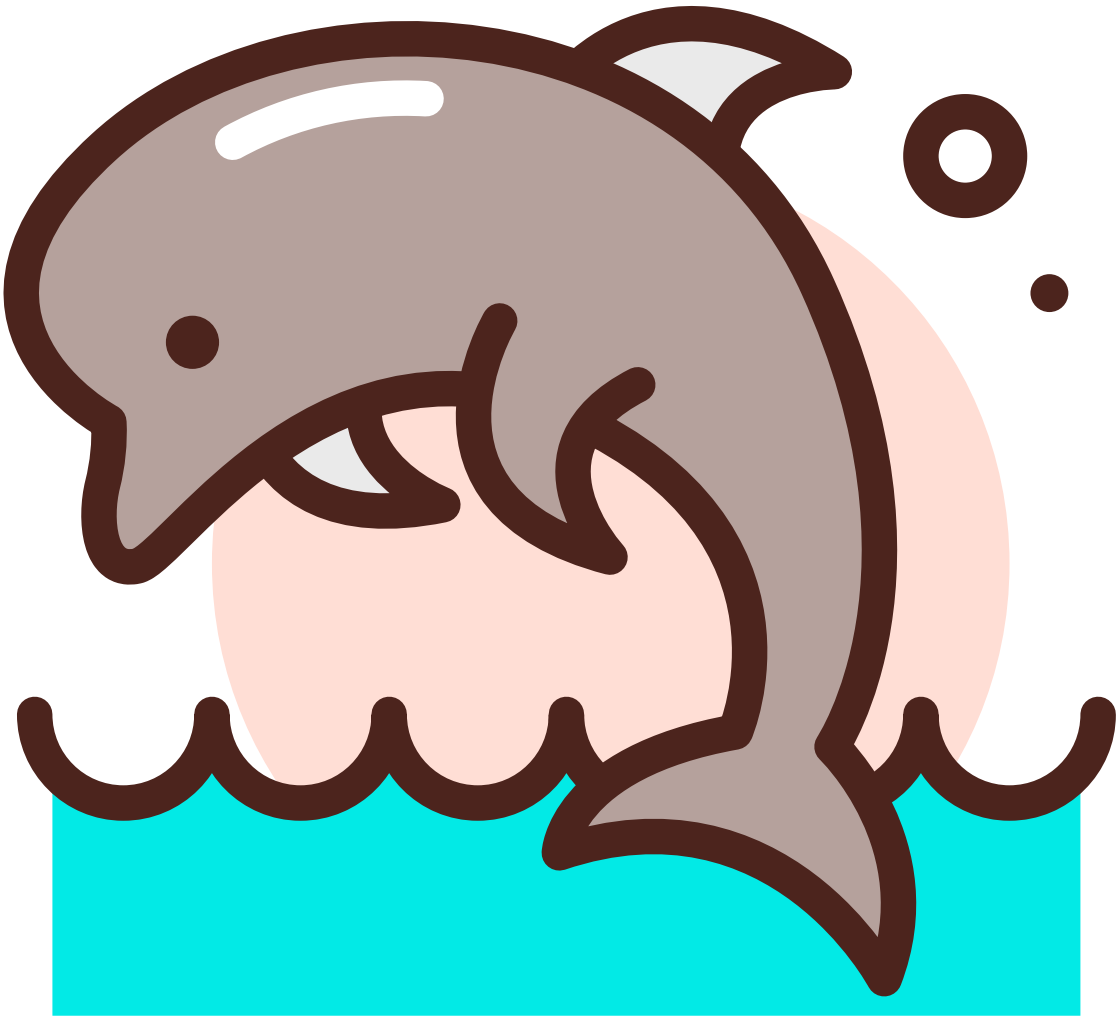
(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

Deuxième partie

Session 2022



14 Polynésie - Jour 1 (22-MATJ1PO1)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction g définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x^2 + x + 1).$$

Pour tout nombre réel x strictement positif :

a. $g'(x) = \frac{1}{2x+1}$ **b.** $g'(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

c. $g'(x) = \ln(2x + 1)$ **d.** $g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

2. La fonction $x \longmapsto \ln(x)$ admet pour primitive sur $]0\ ;\ +\infty[$ la fonction :

a. $x \longmapsto \ln(x)$ **b.** $x \longmapsto \frac{1}{x}$ **c.** $x \longmapsto x\ln(x) - x$ **d.** $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

3. On considère la suite (a_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$a_n = \frac{1 - 3^n}{1 + 2^n}.$$

La limite de la suite (a_n) est égale à :

a. $-\infty$ **b.** -1 **c.** 1 **d.** $+\infty$.

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2\ ;\ 2]$. Le tableau de variations de la **fonction f' dérivée** de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ est donné par :

x	-2		-1		0		2
Variations de f'	1	↘	0	↘	-2	↗	-1

La fonction f est :

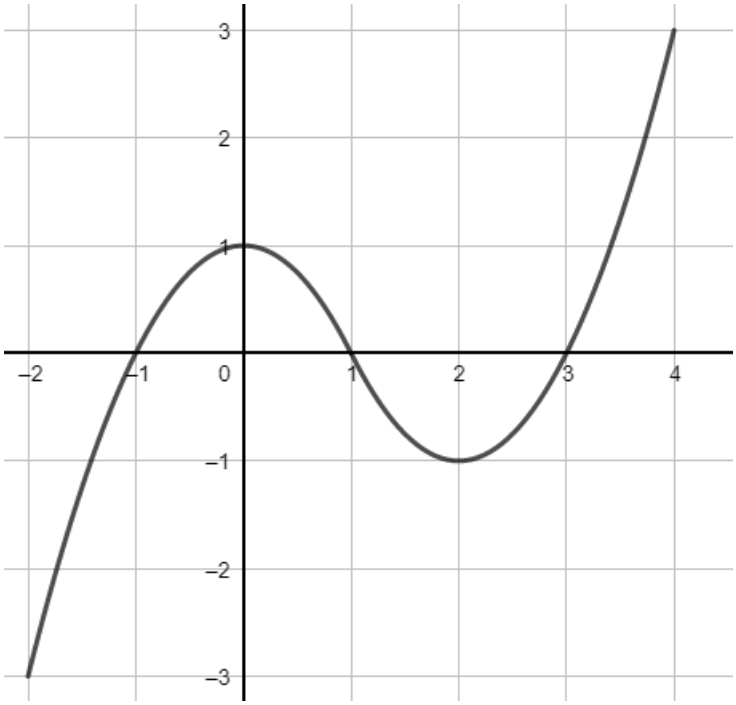
a. convexe sur $[-2\ ;\ -1]$.

b. concave sur $[0\ ;\ 1]$.

c. convexe sur $[-1\ ;\ 2]$.

d. concave sur $[-2\ ;\ 0]$.

5. On donne ci-dessous la courbe représentative de la **dérivée f'** d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.



Par lecture graphique de la courbe de f', déterminer l'affirmation correcte pour f :

a. f est décroissante sur $[0\ ;2]$.

b. f est décroissante sur $[-1\ ;\ 0]$.

c. f admet un maximum en 1 sur $[0\ ;2]$.

d. f admet un maximum en 3 sur $[2\ ;4]$.

6. Une action est cotée à 57 euros. Sa valeur augmente de 3% tous les mois.

La fonction python `seuil()` qui renvoie le nombre de mois à attendre pour que sa valeur dépasse 200 euros est :

a.

```
def seuil() :
      m=0
      v=57
      while v < 200 :
            m=m+1
            v=v*1.03
      return m
```

b.

```
def seuil() :
      m=0
      v=57
      while v > 200 :
            m=m+1
            v=v*1.03
      return m
```

c.

```
def seuil() :
      v=57
      for i in range (200) :
            v=v*1.03
      return v
```

d.

```
def seuil() :
      m=0
      v=57
      if v < 200 :
            m=m+1
      else :
            v=v*1.03
      return m
```

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont infectés par une certaine maladie.

Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

- pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
- pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.

On considère les événements suivants :

- M : « la personne est malade » ;
- T : « le test est positif ».

1. Calculer la probabilité de l'événement $M \cap T$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, est de 0,0653.

3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?

4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

5. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.

a. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}.$$

1.

a. Calculer les termes u_1, u_2 et u_3 . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

b. Recopier le script Python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que `liste(k)` prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k .

```
1.      def liste(k) :
2.              L = []
3.              u = …
4.              for i in range(0, k+1) :
5.                  L.append(u)
6.                  u = …
7.              return(L)
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

4. Déterminer la valeur de sa limite.

5.

a. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

b. Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

EXERCICE 4 (7 points) **Thèmes : géométrie dans le plan et dans l'espace**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé où l'on considère :

- les points $A(2\ ;\ -1\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0\ ;\ -3)$, $C(6\ ;\ 6\ ;\ 1)$ et $E(1\ ;\ 2\ ;\ 4)$;
- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $2x - y - z + 4 = 0$.

1.

a. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC.

c. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$, arrondie au degré.

2.

a. Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E.

d. Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\right)$.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.
Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide ABCE est égal à 16,5 unités de volume.

15 Polynésie - Jour 2 (22-MATJ2PO1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points) **Thèmes : fonctions, primitives, probabilités**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x + 1.$$

Parmi les quatre expressions suivantes, laquelle est celle de la fonction dérivée de f ?

a. $\ln(x)$	**b.** $\frac{1}{x} - 1$	**c.** $\ln(x) - 2$	**d.** $\ln(x) - 1$

2. On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2[1 - \ln(x)]$.

Parmi les quatre affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

a. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$	**b.** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$	**c.** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$	**d.** La fonction g n'admet pas de limite en 0.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 0{,}9x^2 - 0{,}1x$.

Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ est :

a. 0	**b.** 1	**c.** 2	**d.** 3

4. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$,
et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$,
alors, une primitive K de k est définie sur $\mathbb{R}$ par :

a. $K(x) = H(2x)$	**b.** $K(x) = 2H(2x)$	**c.** $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$	**d.** $K(x) = 2H(x)$

5. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe de la fonction f définie sur **R** par $f(x) = x\mathrm{e}^x$ est :

a. $y = \mathrm{e}\,x + \mathrm{e}$	**b.** $y = 2\mathrm{e}\,x - \mathrm{e}$	**c.** $y = 2\mathrm{e}\,x + \mathrm{e}$	**d.** $y = \mathrm{e}\,x$

6. Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $(0{,}2)^n < 0{,}001$ sont tous les nombres entiers n tels que :

a. $n \leq 4$	**b.** $n \leq 5$	**c.** $n \geq 4$	**d.** $n \geq 5$

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons ;
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les événements suivants :

- C : « le casque est contrefait » ;
- D : « le casque présente un défaut de conception » ;
- $\overline{C}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les événements contraires de C et D.

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1

1. Calculer $P(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que $P(D)=0{,}036$.

3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

Partie 2

On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n = 35$.

a. Justifier que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $n = 35$ et $p = 0{,}036$.

b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.

c. Calculer $P(X \leq 1)$.

2. Dans cette question, n n'est pas fixé.

Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieure à 0,99 ?

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 40 \\ u_{n+1} = 0{,}008u_n(200 - u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année (2021+n).

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 100] par $f(x) = 0{,}008x(200 - x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle [0 ; 100] l'équation $f(x) = x$.

3.

a. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle [0 ; 100] et dresser son tableau de variations.

b. En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 100.$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

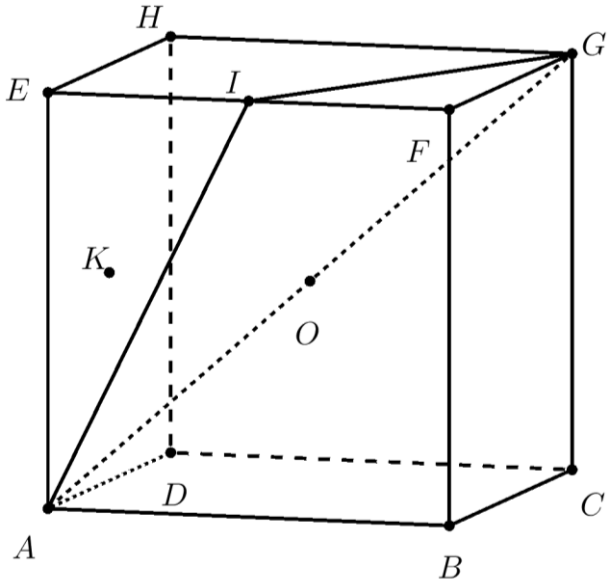
4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :
        n = 0
        u = 40
        while u < p :
            n = n+1
            u = 0.008*u*(200-u)
        return(n+2021)
```

L'exécution de `seuil(100)` ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question **3**.

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$. Le point I est le milieu du segment [EF], K le centre du carré ADHE et O le milieu du segment [AG].



Le but de l'exercice est de calculer de deux manières différentes, la distance du point B au plan (AIG).

Partie 1. Première méthode

1. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, et G.

On admet que les points I et K ont pour coordonnées I $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ 1\right)$ et K $\left(0\ ;\frac{1}{2}\ ;\frac{1}{2}\right)$.

2. Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG).

3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est : $2x - y - z = 0$.

4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BK).

5. En déduire que le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) a pour coordonnées L $\left(\frac{1}{3}\ ;\frac{1}{3}\ ;\frac{1}{3}\right)$.

6. Déterminer la distance du point B au plan (AIG).

Partie 2. Deuxième méthode

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times b \times h$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

1.

a. Justifier que dans le tétraèdre ABIG, [GF] est la hauteur relative à la base AIB.

b. En déduire le volume du tétraèdre ABIG.

2. On admet que $\text{AI} = \text{IG} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et que $\text{AG} = \sqrt{3}$.

Démontrer que l'aire du triangle isocèle AIG est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

3. En déduire la distance du point B au plan (AIG).

16 Métropole - Jour 1 (22-MATJ1ME1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 mai 2022

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices.**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Exercice 1 (7 points) **Thèmes : fonction exponentielle, suites.**

Dans le cadre d'un essai clinique, on envisage deux protocoles de traitement d'une maladie.
L'objectif decet exercice est d'étudier, pour ces deux protocoles, l'évolution de la quantité de médicament présente dans le sang d'un patient en fonction du temps.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Etude du premier protocole

Le premier protocole consiste à faire absorber un médicament, sous forme de comprimé, au patient.
On modélise la quantité de médicament présente dans le sang du patient, exprimée en mg, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par $f(t) = 3te^{-0,5t+1}$, où t désigne le temps, exprimé en heure, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. a. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ et on note f' sa fonction dérivée.

Montrer que, pour tout nombre réel t de $[0; 10]$, on a : $f'(t) = 3(-0,5t + 1)e^{-0,5t+1}$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$.

c. Selon cette modélisation, au bout de combien de temps la quantité de médicament présente dans le sang du patient sera-t-elle maximale ? Quelle est alors cette quantité maximale ?

2. a. Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; 2]$, notée α, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[2; 10]$, notée β, et qu'une valeur approchée de β à 10^{-2} près est 3,46.

b. On considère que ce traitement est efficace lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5 mg.
Déterminer, à la minute près, la durée d'efficacité du médicament dans le cas de ce protocole.

Partie B : Etude du deuxième protocole

Le deuxième protocole consiste à injecter initialement au patient, par piqûre intraveineuse, une dose de 2 mg de médicament puis à réinjecter toutes les heures une dose de 1,8 mg.

On suppose que le médicament se diffuse instantanément dans le sang et qu'il est ensuite progressivement éliminé.

On estime que lorsqu'une heure s'est écoulée après une injection, la quantité de médicament dans le sang a diminué de 30 % par rapport à la quantité présente immédiatement après cette injection.

On modélise cette situation à l'aide de la suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n désigne la quantité de médicament, exprimée en mg, présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la n-ème heure. On a donc $u_0 = 2$.

1. Calculer, selon cette modélisation, la quantité u_1 de médicament (en mg) présente dans le sang du patient immédiatement après l'injection de la première heure.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq u_{n+1} < 6$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

c. Déterminer la valeur de ℓ. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 6 - u_n$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7 dont on précisera le premier terme.

b. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Avec ce protocole, on arrête les injections lorsque la quantité de médicament présente dans le sang du patient est supérieure ou égale à 5,5 mg.

Déterminer, en détaillant les calculs, le nombre d'injections réalisées en appliquant ce protocole.

Exercice 2 (7 points) **Thème : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère :

• le point A de coordonnées $(-1; 1; 3)$,

• la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

On admet que le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.

b. Montrer que le point $B(-1; 3; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\vec{u}$.

2. On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$, et on appelle H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$. Ainsi, H est le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.

a. Montrer que le plan $\mathcal{P}$ admet pour équation cartésienne : $2x - y + 2z - 3 = 0$.

b. En déduire que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}; \frac{19}{9}; \frac{16}{9}\right)$.

c. Calculer la longueur AH. On donnera une valeur exacte.

3. Dans cette question, on se propose de retrouver les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$, par une autre méthode.

On rappelle que le point $B(-1; 3; 0)$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ et que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

a. Justifier qu'il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{HB} = k\vec{u}$.

b. Montrer que $k = \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

c. Calculer la valeur du nombre réel k et retrouver les coordonnées du point H.

4. On considère un point C appartenant au plan $\mathcal{P}$ tel que le volume du tétraèdre $ABCH$ soit égal à $\frac{8}{9}$.
Calculer l'aire du triangle ACH.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

Exercice 3 (7 points) **Thème : probabilités**

Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel.

Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.

1. Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.

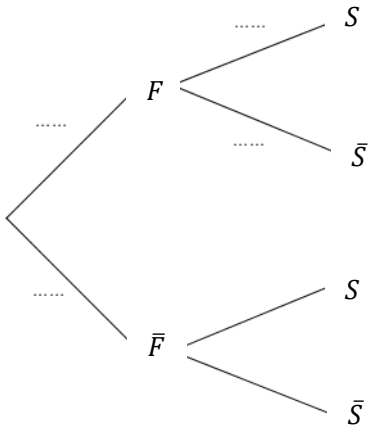
On interroge au hasard un salarié de l'entreprise et on considère les événements :

- F : « le salarié interrogé est une femme »,
- S : « le salarié interrogé a suivi le stage ».

$\bar{F}$ et $\bar{S}$ désignent respectivement les événements contraires des événements F et S.

a. Donner la probabilité de l'événement S.

b. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-contre sur les quatre branches indiquées.



c. Démontrer que la probabilité que la personne interrogée soit une femme ayant suivi le stage est égale à $0{,}208$.

d. On sait que la personne interrogée a suivi le stage. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

e. Le directeur affirme que, parmi les hommes salariés de l'entreprise, moins de 10 % ont suivi le stage.
Justifier l'affirmation du directeur.

2. On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 20 salariés de cette entreprise choisis au hasard associe le nombre de salariés de cet échantillon ayant suivi le stage. On suppose que l'effectif des salariés de l'entreprise est suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

a. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X.

b. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que 5 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

c. Le programme ci-contre, écrit en langage Python, utilise la fonction **binomiale**$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$ créée pour l'occasion qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = i)$ dans le cas où la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

```
def proba(k):
    P=0
    for i in range(0,k+1):
        P=P+binomiale(i,20,0.25)
    return P
```

Déterminer, à 10^{-3} près, la valeur renvoyée par ce programme lorsque l'on saisit proba(5) dans la console Python. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

d. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'au moins 6 salariés dans un échantillon de 20 aient suivi le stage.

3. Cette question est indépendante des questions **1** et **2**.
Pour inciter les salariés à suivre le stage, l'entreprise avait décidé d'augmenter les salaires des salariés ayant suivi le stage de 5%, contre 2% d'augmentation pour les salariés n'ayant pas suivi le stage.
Quel est le pourcentage moyen d'augmentation des salaires de cette entreprise dans ces conditions ?

Exercice 4 (7 points) **Thème : fonctions numériques**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les six questions sont indépendantes.

1. La courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2x^2+3x-1}{x^2+1}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

a. $x = -2$; **b.** $y = -1$;

c. $y = -2$; **d.** $y = 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$.
La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(0) = 1$ est définie par :

a. $F(x) = \frac{x^2}{2}e^{x^2}$; **b.** $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$;

c. $F(x) = (1 + 2x^2)e^{x^2}$; **d.** $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}$.

3. On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}_{f'}$ **de la fonction dérivée** f' d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

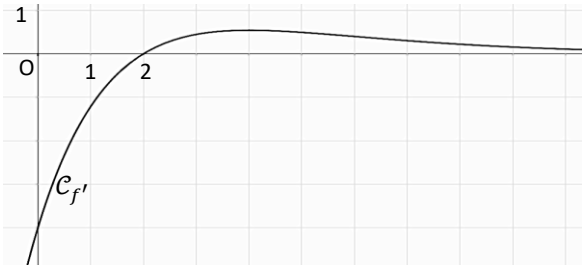
On peut affirmer que la fonction f est :

a. concave sur $]0; +\infty[$;

b. convexe sur $]0; +\infty[$;

c. convexe sur $[0; 2]$;

d. convexe sur $[2; +\infty[$.



4. Parmi les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{-x^2} + 2$:

a. toutes sont croissantes sur $\mathbb{R}$; **b.** toutes sont décroissantes sur $\mathbb{R}$;

c. certaines sont croissantes sur $\mathbb{R}$ et d'autres décroissantes sur $\mathbb{R}$;

d. toutes sont croissantes sur $]-\infty; 0]$ et décroissantes sur $[0; +\infty[$.

5. La limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln x}{3x^2+1}$ est égale à :

a. $\frac{2}{3}$; **b.** $+\infty$; **c.** $-\infty$; **d.** 0 .

6. L'équation $e^{2x} + e^x - 12 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:

a. trois solutions ; **b.** deux solutions ; **c.** une seule solution ; **d.** aucune solution.

17 Métropole - Jour 2 (22-MATJ2ME1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

Jeudi 12 mai 2022

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte

Exercice 1 (7 points) **Thème : probabilités**

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord.
Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70 % des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose.

Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que:

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 97 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 95% des cas.

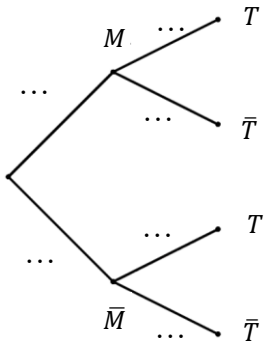
Partie A

Des vétérinaires capturent un coyote d'Oklahoma au hasard et lui font subir un test pour l'ehrlichiose.
On considère les événements suivants :

- M : « le coyote est malade » ;
- T : « le test du coyote est positif ».

On note $\overline{M}$ et $\overline{T}$ respectivement les événements contraires de M et T.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation.



2. Déterminer la probabilité que le coyote soit malade et que son test soit positif.

3. Démontrer que la probabilité de T est égale à 0,694.

4. On appelle « valeur prédictive positive du test » la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test est positif.
Calculer la valeur prédictive positive du test. On arrondira le résultat au millième.

5. **a.** Par analogie avec la question précédente, proposer une définition de la « valeur prédictive négative du test », et calculer cette valeur en arrondissant au millième.
b. Comparer les valeurs prédictives positive et négative du test, et interpréter.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un coyote capturé au hasard présente un test positif est de 0,694.

1. Lorsqu'on capture au hasard cinq coyotes, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard associe le nombre de coyotes dans cet échantillon ayant un test positif.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Justifier et préciser ses paramètres.
b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de cinq coyotes capturés au hasard, un seul ait un test positif. On arrondira le résultat au centième.
c. Un vétérinaire affirme qu'il y a plus d'une chance sur deux qu'au moins quatre coyotes sur cinq aient un test positif : cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.

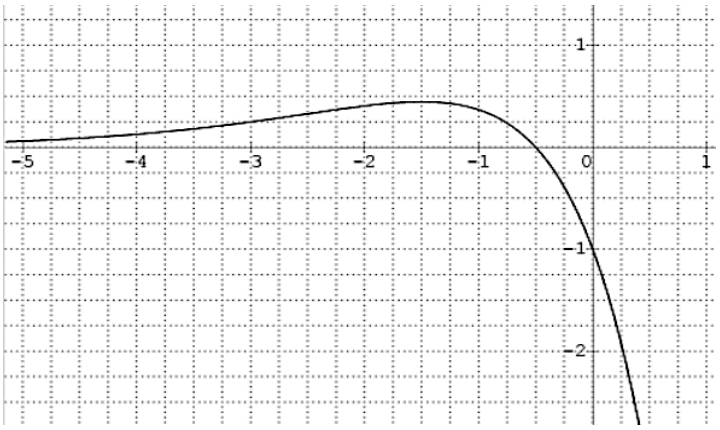
2. Pour tester des médicaments, les vétérinaires ont besoin de disposer d'un coyote présentant un test positif. Combien doivent-ils capturer de coyotes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux présente un test positif soit supérieure à $0{,}99$?

Exercice 2 (7 points) **Thèmes : fonctions numériques et suites**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Pour les questions **1** à **3** ci-dessous, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
La courbe de sa fonction dérivée f' est donnée ci-dessous.
On admet que f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ et que sa courbe coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(-\frac{1}{2}; 0)$.

On rappelle que **la courbe ci-dessous représente la fonction dérivée f' de f.**



Question 1 :

a. La fonction f admet un maximum en $-\frac{3}{2}$;

b. La fonction f admet un maximum en $-\frac{1}{2}$;

c. La fonction f admet un minimum en $-\frac{1}{2}$;

d. Au point d'abscisse -1, la courbe de la fonction f admet une tangente horizontale.

Question 2 :

a. La fonction f est convexe sur $]-\infty; -\frac{3}{2}[$;

b. La fonction f est convexe sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$;

c. La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f n'admet pas de point d'inflexion ;

d. La fonction f est concave sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$.

Question 3 :

La dérivée seconde f'' de la fonction f vérifie :

a. $f''(x) \geq 0$ pour $x \in \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right[$;

b. $f''(x) \geq 0$ pour $x \in [-2; -1]$;

c. $f''\left(\frac{-3}{2}\right) = 0$;

d. $f''(-3) = 0$.

Question 4 : On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).
On sait que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq v_n \leq w_n$ et de plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3$.
On peut alors affirmer que :

a. La suite (v_n) converge ;

b. Si la suite (u_n) est croissante alors la suite (v_n) est minorée par u_0 ;

c. $1 \leq v_0 \leq 3$;

d. La suite (v_n) diverge.

Question 5 :

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$.

On peut alors affirmer que :

a. La suite (u_n) diverge ;

b. La suite (u_n) converge ;

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$;

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Question 6 :

On considère (u_n) une suite réelle telle que pour tout entier naturel n, on a : $n < u_n < n+1$.

On peut affirmer que :

a. Il existe un entier naturel N tel que u_N est un entier ;

b. La suite (u_n) est croissante ;

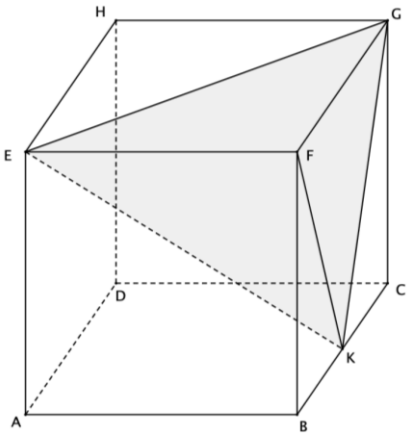
c. La suite (u_n) est convergente ;

d. La suite (u_n) n'a pas de limite.

Exercice 3 (7 points) **Thème : géométrie dans l'espace**

On considère un cube $ABCDEFGH$ et on appelle K le milieu du segment $[BC]$.

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et on considère le tétraèdre $EFGK$.



On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

1. Préciser les coordonnées des points E, F, G et K .
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).
3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 1 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) passant par F.
5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right)$.
6. Justifier que la longueur LF est égale à $\frac{2}{3}$.
7. Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre $EFGK$ est égal à $\frac{1}{6}$.
8. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.
9. On considère les points P milieu du segment $[EG]$, M milieu du segment $[EK]$ et N milieu du segment $[GK]$. Déterminer le volume du tétraèdre $FPMN$.

Exercice 4 (7 points) **Thèmes : fonctions numériques, fonction exponentielle**

Partie A : études de deux fonctions

On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = 0{,}06\,(-x^2 + 13{,}7x) \text{ et } g(x) = (-0{,}15x + 2{,}2)e^{0{,}2x} - 2{,}2\,.$$

On admet que les fonctions f et g sont dérivables et on note f' et g' leurs fonctions dérivées respectives.

1. On donne le tableau de variations complet de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

x	0	6,85	$+\infty$
$f(x)$	0	$f(6{,}85)$	$-\infty$

a. Justifier la limite de f en $+\infty$.

b. Justifier les variations de la fonction f.

c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

2. a. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

b. Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $[0 ; +\infty[$ on a : $g'(x) = (-0{,}03x + 0{,}29)e^{0{,}2x}$.

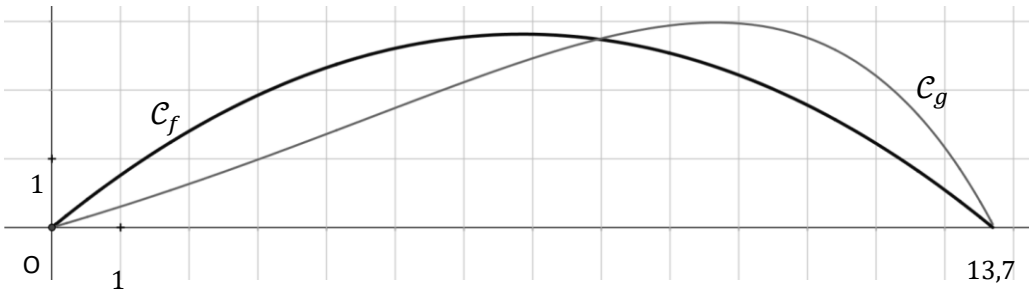
c. Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations sur $[0 ; +\infty[$. Préciser une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de g.

d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et déterminer, à 10^{-2} près, une valeur approchée de cette solution.

Partie B : trajectoires d'une balle de golf

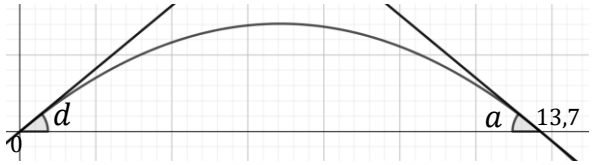
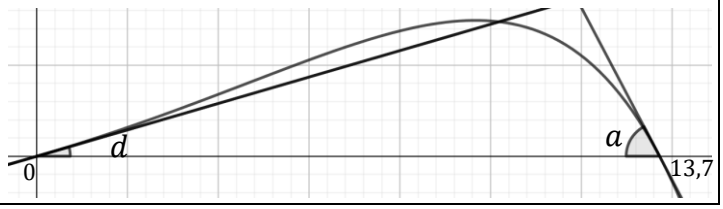
Pour frapper la balle, un joueur de golf utilise un instrument appelé « club » de golf.
On souhaite exploiter les fonctions f et g étudiées en **Partie A** pour modéliser de deux façons différentes la trajectoire d'une balle de golf. On suppose que le terrain est parfaitement plat.

On admettra ici que 13,7 est la valeur qui annule la fonction f et une approximation de la valeur qui annule la fonction g.
On donne ci-dessous les représentations graphiques de f et g sur l'intervalle $[0; 13{,}7]$.



Pour x représentant la distance horizontale parcourue par la balle en dizaine de yards après la frappe, (avec $0 \leq x \leq 13{,}7$), $f(x)$ (ou $g(x)$ selon le modèle) représente la hauteur correspondante de la balle par rapport au sol, en dizaine de yards (1 yard correspond à environ $0{,}914$ mètre).

On appelle « angle de décollage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe (C_f ou C_g selon le modèle) en son point d'abscisse 0. Une mesure de l'angle de décollage de la balle est un nombre réel d tel que $\tan(d)$ est égal au coefficient directeur de cette tangente.
De même, on appelle « angle d'atterrissage » de la balle, l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe (C_f ou C_g selon le modèle) en son point d'abscisse 13,7. Une mesure de l'angle d'atterrissage de la balle est un nombre réel a tel que $\tan(a)$ est égal à l'opposé du coefficient directeur de cette tangente.
Tous les angles sont mesurés en degré.

Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe C_f.	Le schéma illustre les angles de décollage et d'atterrissage associés à la courbe C_g.
	

1. *Première modélisation :* on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $f(x)$ la hauteur correspondante de la balle. Selon ce modèle :

a. Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?

b. Vérifier que $f'(0) = 0{,}822$.

c. Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).

d. Quelle propriété graphique de la courbe C_f permet de justifier que les angles de décollage et d'atterrissage de la balle sont égaux ?

2. *Seconde modélisation :* on rappelle qu'ici, l'unité étant la dizaine de yards, x représente la distance horizontale parcourue par la balle après la frappe et $g(x)$ la hauteur correspondante de la balle. Selon ce modèle :

a. Quelle est la hauteur maximale, en yard, atteinte par la balle au cours de sa trajectoire ?

On précise que $g'(0) = 0{,}29$ et $g'(13{,}7) \approx -1{,}87$.

b. Donner une mesure en degré de l'angle de décollage de la balle, arrondie au dixième. (On pourra éventuellement utiliser le tableau ci-dessous).

c. Justifier que 62 est une valeur approchée, arrondie à l'unité près, d'une mesure en degré de l'angle d'atterrissage de la balle.

Tableau : extrait d'une feuille de calcul donnant une mesure en degré d'un angle quand on connait sa tangente :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	tan(θ)	0,815	0,816	0,817	0,818	0,819	0,82	0,821	0,822	0,823	0,824	0,825	0,826
2	θ en degrés	39,18	39,21	39,25	39,28	39,32	39,35	39,39	39,42	39,45	39,49	39,52	39,56
3													
4	tan(θ)	0,285	0,286	0,287	0,288	0,289	0,29	0,291	0,292	0,293	0,294	0,295	0,296
5	θ en degrés	15,91	15,96	16,01	16,07	16,12	16,17	16,23	16,28	16,33	16,38	16,44	16,49
6													

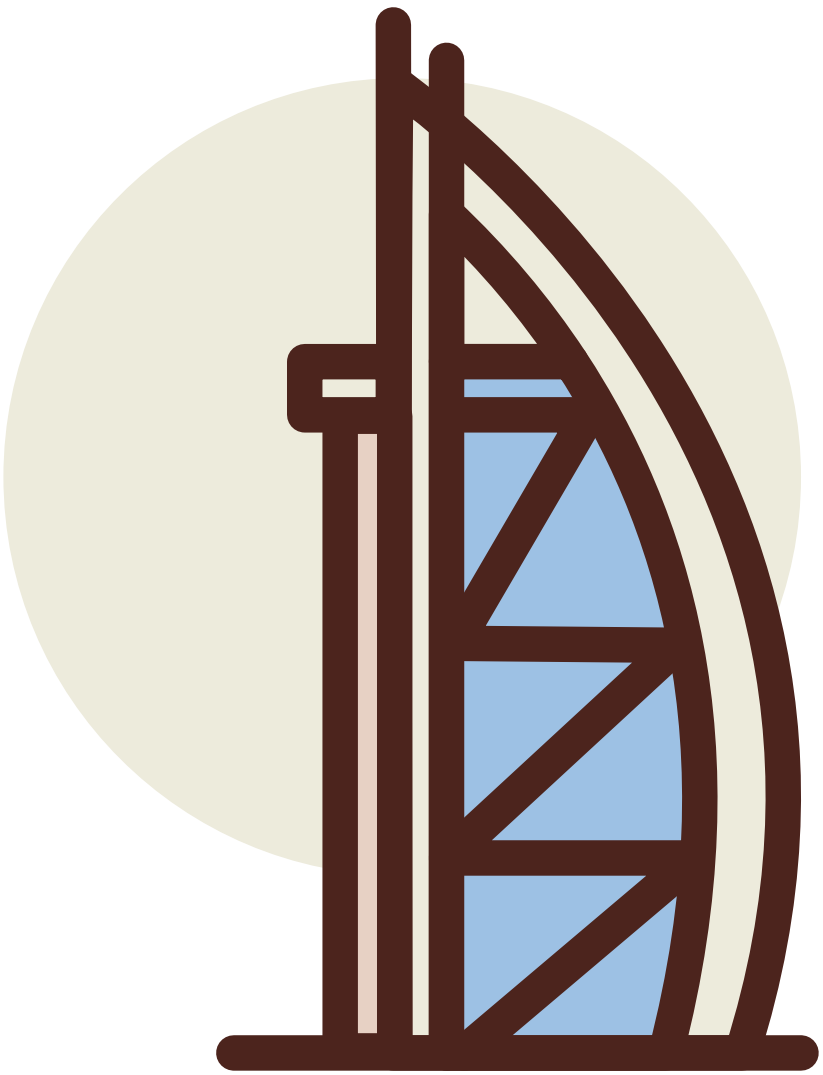
Partie C : interrogation des modèles

À partir d'un grand nombre d'observations des performances de joueurs professionnels, on a obtenu les résultats moyens suivants :

Angle de décollage en degré	Hauteur maximale en yard	Angle d'atterrissage en degré	Distance horizontale en yard au point de chute
24	**32**	**52**	**137**

Quel modèle, parmi les deux étudiés précédemment, semble le plus adapté pour décrire la frappe de la balle par un joueur professionnel ? La réponse sera justifiée.

18 Centres Étrangers - Jour 1 (22-MATJ1G11)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le sujet propose 4 exercices

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Exercice 1 (7 points) Thème : Fonction logarithme

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Les six questions sont indépendantes.

Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1- On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

Sur $\mathbf{R}$, l'équation $f(x) = 2022$

a- n'admet aucune solution.
b- admet exactement une solution.
c- admet exactement deux solutions.
d- admet une infinité de solutions.

2- Soit la fonction g définie pour tout réel x strictement positif par :

$$g(x) = x\ln(x) - x^2$$

On note C_g sa courbe représentative dans un repère du plan.

a- La fonction g est convexe sur $]0, +\infty[$.
b- La fonction g est concave sur $]0, +\infty[$.
c- La courbe C_g admet exactement un point d'inflexion sur $]0, +\infty[$.
d- La courbe C_g admet exactement deux points d'inflexion sur $]0, +\infty[$.

3- On considère la fonction f définie sur $]-1; 1[$ par

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

Une primitive de la fonction f est la fonction g définie sur l'intervalle $]-1; 1[$ par :

a- $g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1 - x^2)$
b- $g(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$
c- $g(x) = \frac{x^2}{2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)}$
d- $g(x) = \frac{x^2}{2}\ln(1 - x^2)$

4- La fonction $x \mapsto \ln(-x^2 - x + 6)$ est définie sur

a- $]-3; 2[$
b- $]-\infty; 6]$
c- $]0; +\infty[$
d- $]2; +\infty[$

5- On considère la fonction f définie sur $]0{,}5\ ;\ +\infty\ [$ par

$$f(x)\ =\ x^2\ -\ 4x\ +\ 3\ln(2x\ -\ 1)$$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

a- $y\ =\ 4x\ -\ 7$ **b-** $y\ =\ 2x\ -\ 4$
c- $y\ =\ -3(x\ -\ 1)\ +\ 4$ **d-** $y\ =\ 2x\ -\ 1$

6- L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions dans **R** de l'inéquation $\ln(x+3) < 2\ln(x+1)$ est :

a- $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$ **b-** $\mathcal{S} =]1; +\infty[$
c- $\mathcal{S} = \emptyset$ **d-** $\mathcal{S} =]-1; 1[$

Exercice 2 (7 points) Thème : Géométrie dans l'espace

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(2; 0; 3),\ B(0; 2; 1),\ C(-1; -1; 2) \text{ et } D(3; -3; -1).$$

1- Calcul d'un angle.

a- Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
b- Calculer les longueurs AB et AC.
c- À l'aide du produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, déterminer la valeur du cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degré.

2- Calcul d'une aire.

a- Déterminer une équation du plan P passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB).
b- Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).
c- En déduire les coordonnées du projeté orthogonal E du point C sur la droite (AB), c'est-à-dire du point d'intersection entre la droite (AB) et le plan P.
d- Calculer l'aire du triangle ABC.

3- Calcul d'un volume.

a- Soit le point $F(1; -1; 3)$. Montrer que les points A, B, C et F sont coplanaires.
b- Vérifier que la droite (FD) est orthogonale au plan (ABC).
c- Sachant que le volume d'un tétraèdre est égal au tiers de l'aire de sa base multiplié par sa hauteur, calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 3 (7 points) Thèmes : Fonction exponentielle et suite

Partie A :

Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^x - x$$

1- Déterminer les limites de h en $-\infty$ et $+\infty$.

2- Étudier les variations de h et dresser son tableau de variation.

3- En déduire que :
si a et b sont deux réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $h(a) - h(b) \leqslant 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1- Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse à l'écart entre T et C_f au voisinage de 0. Cet écart est défini comme la différence des ordonnées des points de T et C_f de même abscisse.

On s'intéresse aux points d'abscisse $\frac{1}{n}$, avec n entier naturel non nul.

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$u_n = \exp\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} - 1$$

2- Déterminer la limite de la suite (u_n).

3- a- Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_{n+1} - u_n = h\left(\frac{1}{n+1}\right) - h\left(\frac{1}{n}\right)$$

où h est la fonction définie à la partie A.

b- En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4- Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées à 10^{-9} des premiers termes de la suite (u_n).

n	u_n
1	0,718281828
2	0,148721271
3	0,062279092
4	0,034025417
5	0,021402758
6	0,014693746
7	0,010707852
8	0,008148453
9	0,006407958
10	0,005170918

Donner la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle l'écart entre T et C_f semble être inférieur à 10^{-2}.

Exercice 4 (7 points) Thème : Probabilités

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Au cours de la fabrication d'une paire de lunettes, la paire de verres doit subir deux traitements notés T1 et T2.

Partie A

On prélève au hasard une paire de verres dans la production.

On désigne par *A* l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 ».

On désigne par *B* l'évènement : « la paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 ».

On note respectivement $\overline{A}$ et $\overline{B}$ les évènements contraires de *A* et *B*.

Une étude a montré que :

- la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T1 notée $P(A)$ est égale à 0,1.

- la probabilité qu'une paire de verres présente un défaut pour le traitement T2 notée $P(B)$ est égale à 0,2.

- la probabilité qu'une paire de verres ne présente aucun des deux défauts est 0,75.

1- Recopier et compléter le tableau suivant avec les probabilités correspondantes.

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			1

2- **a-** Déterminer, en justifiant la réponse, la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour au moins un des deux traitements T1 ou T2.

b- Donner la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente deux défauts, un pour chaque traitement T1 et T2.

c- Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

3- Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour un seul des deux traitements.

4- Calculer la probabilité qu'une paire de verres, prélevée au hasard dans la production, présente un défaut pour le traitement T2, sachant que cette paire de verres présente un défaut pour le traitement T1.

Partie B

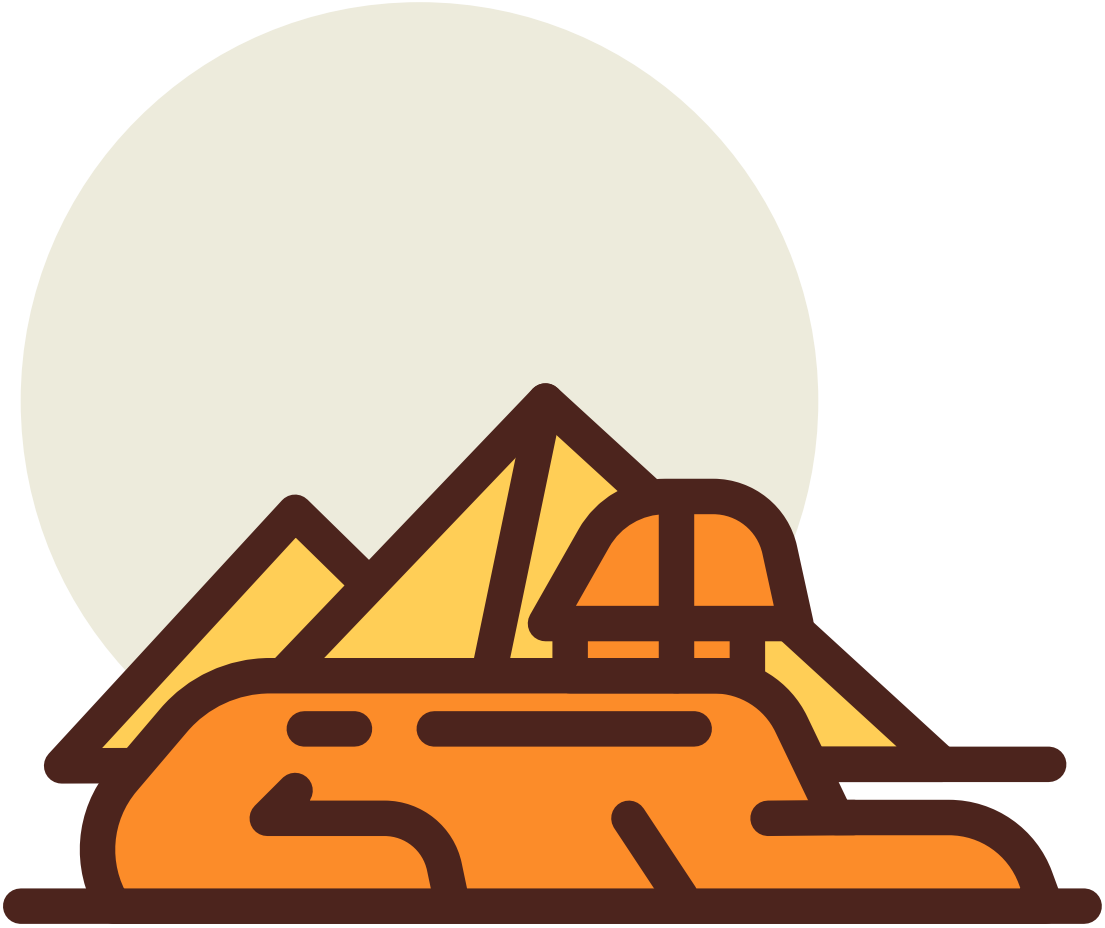
On prélève, au hasard, un échantillon de 50 paires de verres dans la production. On suppose que la production est suffisamment importante pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note *X* la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de ce type, associe le nombre de paires de verres qui présentent le défaut pour le traitement T1.

1- Justifier que la variable aléatoire *X* suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

2- Donner l'expression permettant de calculer la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, exactement 10 paires de verres qui présentent ce défaut.
Effectuer ce calcul et arrondir le résultat à 10^{-3}.

3- En moyenne, combien de paires de verres ayant ce défaut peut-on trouver dans un échantillon de 50 paires ?

19 Centres Étrangers - Jour 2 (22-MATJ2G11)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

JOUR J2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le sujet propose 4 exercices

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Exercice n°1 (7 points) Thème : Fonction exponentielle

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse incorrecte, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1- Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

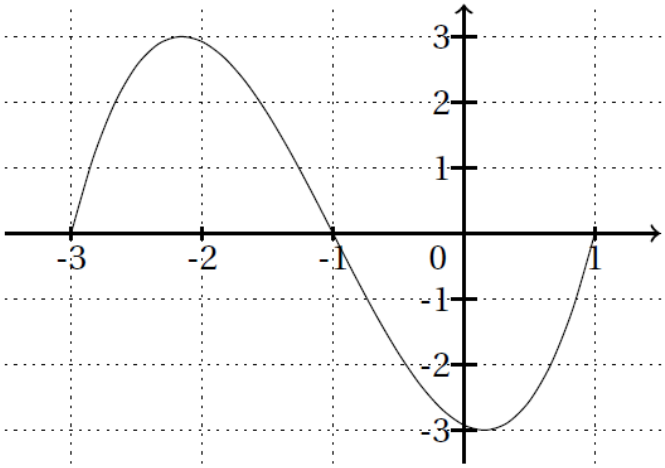
$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x}$$

On suppose que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

a- $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ b- $f'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$

c- $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}$ d- $f'(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$

2- Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3; 1]$. On donne ci-dessous la représentation graphique de sa fonction dérivée seconde f''.



On peut alors affirmer que :

a- La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-1; 1]$

b- La fonction f est concave sur l'intervalle $[-2; 0]$

c- La fonction f' est décroissante sur l'intervalle $[-2; 0]$

d- La fonction f' admet un maximum en $x = -1$

3- On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = x^3\mathrm{e}^{-x^2}$$

a- $F(x) = -\frac{1}{6}(x^3+1)\mathrm{e}^{-x^2}$ b- $F(x) = -\frac{1}{4}x^4\mathrm{e}^{-x^2}$

c- $F(x) = -\frac{1}{2}(x^2+1)\mathrm{e}^{-x^2}$ d- $F(x) = x^2(3-2x^2)\mathrm{e}^{-x^2}$

4- Que vaut :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x-1}$$

a- -1 b- 1

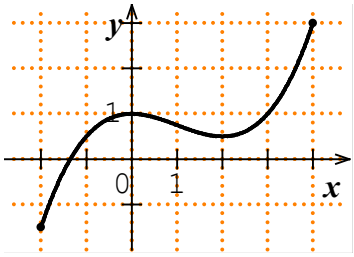
c- $+\infty$ d- N'existe pas

5- On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = e^{2x+1}$.
La seule primitive F sur **R** de la fonction f telle que $F(0) = 1$ est la fonction :

a- $x \mapsto 2e^{2x+1} - 2e + 1$ b- $x \mapsto e^{2x+1} - e$

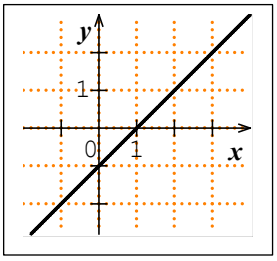
c- $x \mapsto \frac{1}{2}e^{2x+1} - \frac{1}{2}e + 1$ d- $x \mapsto e^{x^2+x}$

6- Dans un repère, on a tracé ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $[-2\,;\,4]$.

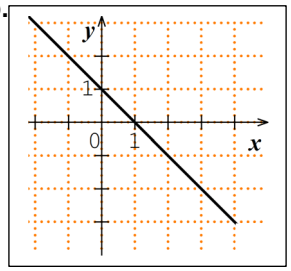


Parmi les courbes suivantes, laquelle représente la fonction f'', dérivée seconde de f ?

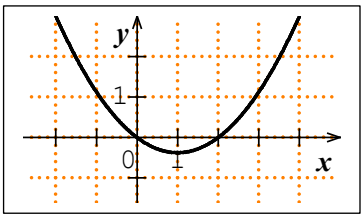
a.



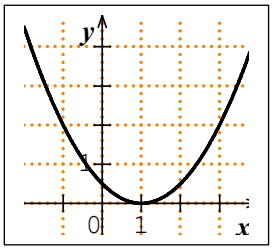
b.



c.



d.



Exercice 2 (7 points) Thèmes : Fonction logarithme et suite

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x) + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1- Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.

2- **a-** On admet que f est dérivable sur $]0;\ +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x)$$

b- En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0;\ +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0;\ +\infty[$ et les limites.

c- Justifier que pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) \in]0;1[$.

3- **a-** Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

b- Étudier la convexité de la fonction f sur $]0;\ +\infty[$.

c- En déduire que pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) \geq x$$

4- On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0;1[$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

a- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.

b- Déduire de la question **3c** la croissance de la suite (u_n).

c- En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 3 (7 points) Thème : Géométrie dans l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

On considère les points $A(3;-2;2), B(6;1;5), C(6;-2;-1)$ et $D(0;4;-1)$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{A} \times h$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire de la base et h la hauteur correspondante.

1- Démontrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2- **a.** Montrer que le triangle ABC est rectangle.

b. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

c. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.

3- On considère le point $H(5\,;0\,;1)$.

a. Montrer qu'il existe des réels α et β tels que $\overrightarrow{BH} = \alpha\overrightarrow{BC} + \beta\overrightarrow{BD}$.

b. Démontrer que H est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BCD).

c. En déduire la distance du point A au plan (BCD).

4- Déduire des questions précédentes l'aire du triangle BCD.

Exercice 4 (7 points) Thème : Probabilités

Une urne contient des jetons blancs et noirs tous indiscernables au toucher.

Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux jetons de cette urne.

On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux jetons tirés sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux jetons tirés sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux jetons tirés sont de couleurs différentes.

1- On considère que l'urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs.

a. Modéliser la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité de perdre 9 € sur une partie.

2- On considère maintenant que l'urne contient 3 jetons blancs et au moins deux jetons noirs mais on ne connait pas le nombre exact de jetons noirs. On appellera N le nombre de jetons noirs.

a. Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu pour une partie. Déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire.

b. Résoudre l'inéquation pour x réel :

$$-x^2 + 30x - 81 > 0$$

c. En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le nombre de jetons noirs que l'urne doit contenir afin que ce jeu soit favorable au joueur.

d. Combien de jetons noirs le joueur doit-il demander afin d'obtenir un gain moyen maximal ?

3- On observe 10 joueurs qui tentent leur chance en effectuant une partie de ce jeu, indépendamment les uns des autres. On suppose que 7 jetons noirs ont été placés dans l'urne (avec 3 jetons blancs). Quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 joueur gagnant 5 euros ?

20 Asie - Jour 1 (22-MATJ1JA1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice en mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9.
L'annexe en page 9 / 9 est à rendre avec la copie.

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**.

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points)

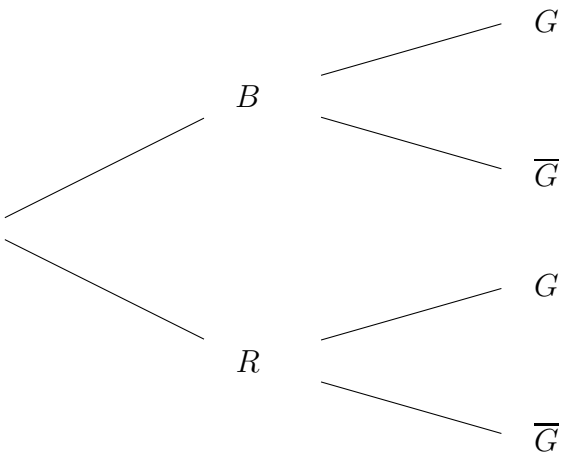
Principaux domaines abordés :
Probabilités conditionnelles et indépendance.
Variables aléatoires.

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.
Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac ;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1. Un joueur fait une partie et on note B l'événement « la case obtenue est blanche », R l'événement « la case obtenue est rouge » et G l'événement « le joueur gagne la partie ».
   (a) Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$.
   (b) On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à $0{,}3$. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :



2. (a) Montrer que $P(G) = 0{,}4$.
   (b) Un joueur gagne la partie.
   Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?
3. Les événements B et G sont-ils indépendants ? Justifier.

4. Un même joueur fait dix parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
   (a) Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
   (b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.
   (c) Calculer $P(X \geq 4)$ arrondie à 10^{-3} près.
   Donner une interprétation du résultat obtenu.
5. Un joueur fait n parties et on note p_n la probabilité de l'événement « le joueur gagne au moins une partie ».
   (a) Montrer que $p_n = 1 - 0{,}6^n$.
   (b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à $0{,}99$.

EXERCICE 2 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Suites numériques.
Algorithmique et programmation.

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
On estime que, toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10% de la quantité de médicament présente dans le sang et qu'il reçoit une dose supplémentaire de $0{,}25$ mg de la substance médicamenteuse.

On étudie l'évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant :
pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes. On a donc $u_0 = 1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 0{,}25$.
3. (a) Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1} < 5$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à $1{,}8$ mg.
   (a) Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

```
def efficace():
    u=1
    n=0
    while .......... :
        u = ...........
        n = n+1
    return n
```

   (b) Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2{,}5 - u_n$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme (v_0).
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2{,}5 - 1{,}5 \times 0{,}9^n$.
   (c) Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg. D'après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Partie B : modèle continu de la quantité médicamenteuse

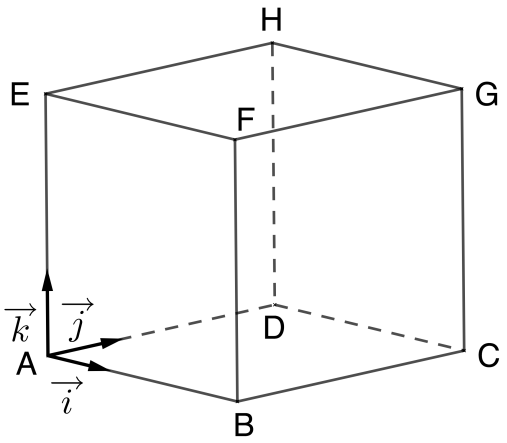
Après une injection initiale de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.
Le débit de la substance médicamenteuse administrée au patient est de $0{,}5$ mg par heure.
La quantité de médicament dans le sang du patient, en fonction du temps, est modélisée par la fonction f, définie sur $[0;+\infty[$, par $f(t) = 2{,}5 - 1{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$,
où t désigne la durée de la perfusion exprimée en heure.
On rappelle que ce médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à 1,8 mg.

1. Le médicament est-il réellement efficace au bout de 3 h 45 min ?
2. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps le médicament devient réellement efficace.
3. Comparer le résultat obtenu avec celui obtenu à la question 4.(b) du modèle discret de la Partie A.

EXERCICE 3 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace.
Orthogonalité et distances dans l'espace.
Représentations paramétriques et équations cartésiennes.

Le solide ABCDEFGH est un cube. On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A};\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel les coordonnées des points B, D et E sont : B$(3\ ;\ 0\ ;\ 0)$, D$(0\ ;\ 3\ ;\ 0)$ et E$(0\ ;\ 0\ ;\ 3)$.



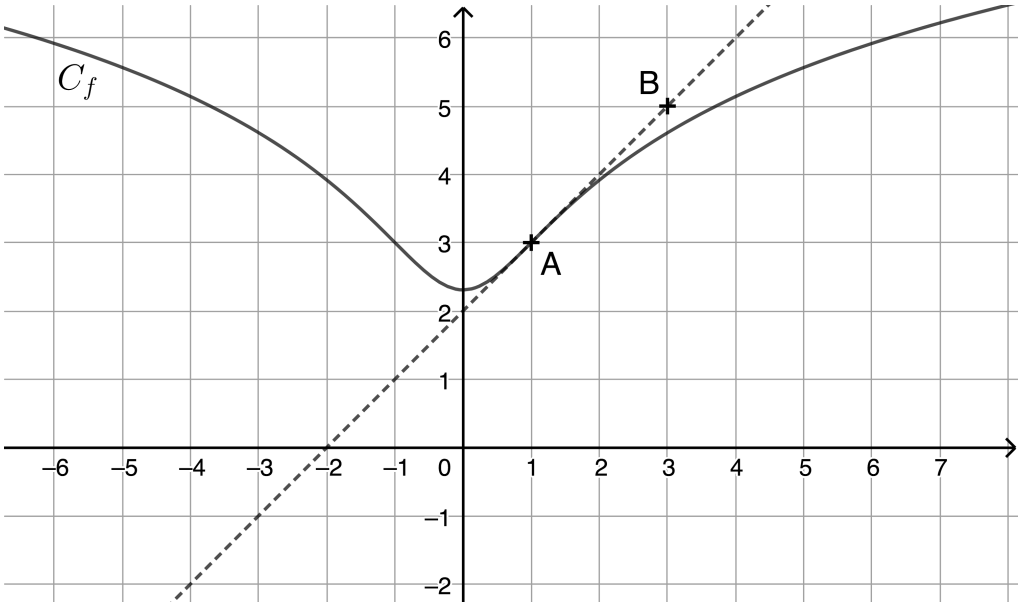
On considère les points P$(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$, Q$(0\ ;\ 2\ ;\ 3)$ et R$(1\ ;\ 0\ ;\ 3)$.

1. Placer les points P, Q et R sur la figure en **ANNEXE** qui sera à rendre avec la copie.
2. Montrer que le triangle PQR est isocèle en R.
3. Justifier que les points P, Q et R définissent un plan.
4. On s'intéresse à présent à la distance entre le point E et le plan (PQR).
   (a) Montrer que le vecteur $\vec{u}(2\ ,\ 1\ ,\ -1)$ est normal au plan (PQR).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (PQR).
   (c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point E et orthogonale au plan (PQR).
   (d) Montrer que le point L$\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{8}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point E sur le plan (PQR).
   (e) Déterminer la distance entre le point E et le plan (PQR).
5. En choisissant le triangle EQR comme base, montrer que le volume du tétraèdre EPQR est $\frac{2}{3}$.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $V = \frac{1}{3} \times$ aire d'une base $\times$ hauteur correspondante.
6. Trouver, à l'aide des deux questions précédentes, l'aire du triangle PQR.

EXERCICE 4 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Étude des fonctions.
Fonction logarithme.

Soit f une fonction définie et dérivable sur **R**. On considère les points A$(1\ ;\ 3)$ et B$(3\ ;\ 5)$.
On donne ci-dessous C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe C_f au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
   (a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   (b) Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur **R** par $f(x) = \ln(x^2+1) + 3 - \ln(2)$.

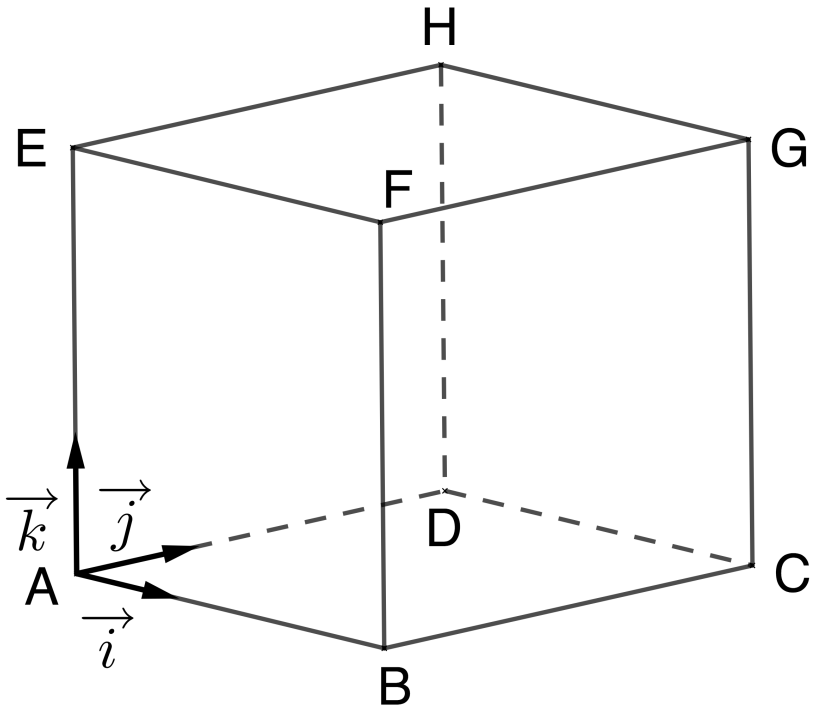
1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   Étudier le sens de variation de la fonction f sur **R**.
   Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. À l'aide du tableau des variations de f, donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur **R** par $f(x) = \ln(x^2+1) + 3 - \ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe C_f.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f''(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

ANNEXE à rendre avec la copie



Modèle CMEN-DOC v2 A4 ©NEOPTEC

Nom de famille :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'usage)

Prénom(s) :

Numéro Inscription :

Né(e) le : / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

21 Asie - Jour 2 (22-MATJ2JA1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice en mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1 à 8.

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**.

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace.
Orthogonalité et distances dans l'espace.
Représentations paramétriques et équations cartésiennes.

Dans un repère orthonormé $\left(O;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{k}\right)$ de l'espace,
on considère les points A $(-3\ ;\ 1\ ;\ 3)$, B $(2\ ;\ 2\ ;\ 3)$, C $(1\ ;\ 7\ ;\ -1)$, D $(-4\ ;\ 6\ ;\ -1)$ et K $(-3\ ;\ 14\ ;\ 14)$.

1. (a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   (b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un rectangle.
   (c) Calculer l'aire du rectangle ABCD.
2. (a) Justifier que les points A, B et D définissent un plan.
   (b) Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(-2\ ;\ 10\ ;\ 13)$ est un vecteur normal au plan (ABD).
   (c) En déduire une équation cartésienne du plan (ABD).
3. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ABD) et qui passe par le point K.
   (b) Déterminer les coordonnées du point I, projeté orthogonal du point K sur le plan (ABD).
   (c) Montrer que la hauteur de la pyramide KABCD de base ABCD et de sommet K vaut $\sqrt{273}$.
4. Calculer le volume V de la pyramide KABCD.

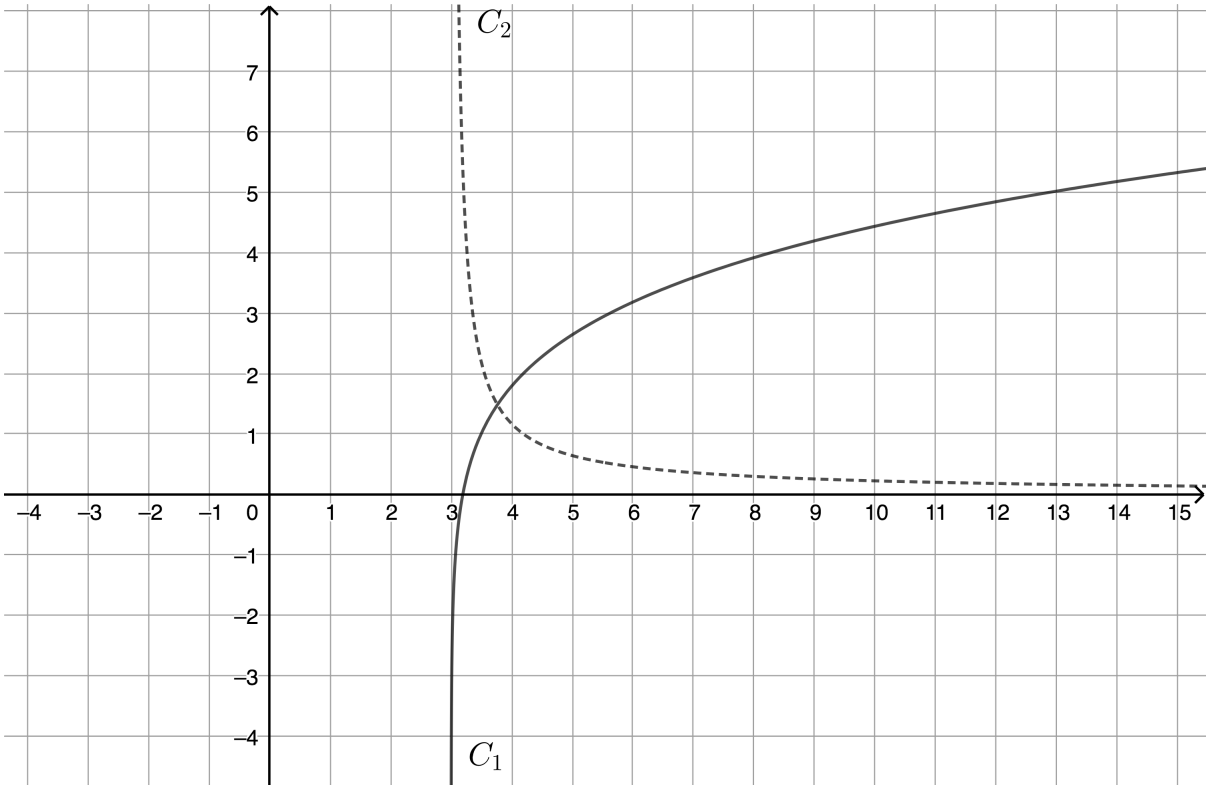
   On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$

EXERCICE 2 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Étude des fonctions.
Fonction logarithme.

Partie A



Dans le repère orthonormé ci-dessus, sont tracées les courbes représentatives d'une fonction f et de sa fonction dérivée, notée f', toutes deux définies sur $]3;+\infty[$.

1. Associer à chaque courbe la fonction qu'elle représente. Justifier.
2. Déterminer graphiquement la ou les solutions éventuelles de l'équation $f(x) = 3$.
3. Indiquer, par lecture graphique, la convexité de la fonction f.

Partie B

1. Justifier que la quantité $\ln(x^2 - x - 6)$ est bien définie pour les valeurs x de l'intervalle $]3; +\infty[$, que l'on nommera I dans la suite.

2. On admet que la fonction f de la Partie A est définie par $f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$ sur I.
   Calculer les limites de la fonction f aux deux bornes de l'intervalle I.
   En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I.

3. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à I.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur I.
   Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de I.

4. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5; 6[$.
   (b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.

5. (a) Justifier que $f''(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f sur I.

EXERCICE 3 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Probabilités conditionnelles et indépendance.
Variables aléatoires.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1

Julien doit prendre l'avion ; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.
S'il prend le bus de 8h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.
Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.

Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de $0{,}8$.
S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées ; il a alors une probabilité de $0{,}5$ d'être à l'heure à l'aéroport .

On notera :

B l'événement : « Julien réussit à prendre son bus » ;
V l'événement : « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol ».

1. Donner la valeur de $P_B(V)$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Montrer que $P(V) = 0{,}6$.
4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

Partie 2

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé.
On appelle cette pratique le surbooking.

Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5% de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.

Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus.
On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?
3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement.
   Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.
4. Calculer $P(X \leq 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.
   Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.

   On appelle :

   Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet ;

   C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

   On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant :

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,947 75	0,030 63	0,014 41	0,005 39	0,001 51	0,000 28	

   (a) Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y = 6)$.

   (b) Justifier que : $C = 51\,500 - 850Y$.

   (c) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau.
   Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.

   (d) Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

EXERCICE 4 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Suites numériques.
Algorithmique et programmation.

On s'intéresse au développement d'une bactérie. Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité $0{,}3$ de mourir sans descendance et une probabilité $0{,}7$ de se diviser en deux bactéries filles.
Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.

Pour tout entier naturel n, on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie. On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :
$p_0 = 0{,}3$ et, pour tout entier naturel n,

$$p_{n+1} = 0{,}3 + 0{,}7{p_n}^2.$$

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de termes de la suite (p_n).

	A	B
1	n	p_n
2	0	0,3
3	1	
4	2	
5	3	0,40769562
6	4	0,416351
7	5	0,42134371
8	6	0,42427137
9	7	0,42600433
10	8	0,42703578
11	9	0,42765169
12	10	0,42802018
13	11	0,42824089
14	12	0,42837318
15	13	0,42845251
16	14	0,42850009
17	15	0,42852863
18	16	0,42854575
19	17	0,42855602

   (a) Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.

   (b) Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?

   (c) Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n).

2. (a) Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0{,}5$.

   (b) Justifier que la suite (p_n) est convergente.

3. On appelle L la limite de la suite (p_n).

   (a) Justifier que L est solution de l'équation $0{,}7x^2 - x + 0{,}3 = 0$.

   (b) Déterminer alors la limite de la suite (p_n).

4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n).

```
1  def suite(n):
2      p=...
3      s=[p]
4      for i in range (...) :
5          p = ...
6          s.append(p)
7      return (s)
```

Recopier, sur votre copie, cette fonction en complétant les lignes 2, 4 et 5 de façon à ce que la fonction `suite(n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

22 La Réunion - Jour 1 (22-MATJ1LR1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**.

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Probabilités.

Dans une station de ski, il existe deux types de forfait selon l'âge du skieur :
- un forfait JUNIOR pour les personnes de moins de vingt-cinq ans ;
- un forfait SÉNIOR pour les autres.

Par ailleurs, un usager peut choisir, en plus du forfait correspondant à son âge, l'option *coupe-file* qui permet d'écourter le temps d'attente aux remontées mécaniques.

On admet que :
- 20% des skieurs ont un forfait JUNIOR ;
- $80\ \%$ des skieurs ont un forfait SÉNIOR ;
- parmi les skieurs ayant un forfait JUNIOR, 6% choisissent l'option coupe-file ;
- parmi les skieurs ayant un forfait SÉNIOR, $12{,}5\%$ choisissent l'option coupe-file.

On interroge un skieur au hasard et on considère les événements :
- J : « le skieur a un forfait JUNIOR » ;
- C : « le skieur choisit l'option coupe-file ».

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité $P(J \cap C)$.

3. Démontrer que la probabilité que le skieur choisisse l'option coupe-file est égale à $0{,}112$.

4. Le skieur a choisi l'option coupe-file. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un skieur ayant un forfait SÉNIOR ? Arrondir le résultat à 10^{-3}.

5. Est-il vrai que les personnes de moins de vingt-cinq ans représentent moins de 15% des skieurs ayant choisi l'option coupe-file ? Expliquer.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un skieur choisisse l'option coupe-file est égale à $0{,}112$.

On considère un échantillon de 30 skieurs choisis au hasard.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre des skieurs de l'échantillon ayant choisi l'option coupe-file.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
Donner les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité qu'au moins un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file.
Arrondir le résultat à 10^{-3}.

3. Calculer la probabilité qu'au plus un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file.
Arrondir le résultat à 10^{-3}.

4. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

EXERCICE 2 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Suites ;
Fonctions, Fonction logarithme.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Un récipient contenant initialement 1 litre d'eau est laissé au soleil.
Toutes les heures, le volume d'eau diminue de 15%.
Au bout de quel nombre entier d'heures le volume d'eau devient-il inférieur à un quart de litre ?

a. 2 heures **b.** 8 heures **c.** 9 heures **d.** 13 heures

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$ et $u_0 = 6$. On peut affirmer que :

a. la suite (u_n) est strictement croissante.

b. la suite (u_n) est strictement décroissante.

c. la suite (u_n) n'est pas monotone.

d. la suite (u_n) est constante.

3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 4\ln(3x)$.
Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, on a :

a. $f(2x) = f(x) + \ln(24)$

b. $f(2x) = f(x) + \ln(16)$

c. $f(2x) = \ln(2) + f(x)$

d. $f(2x) = 2f(x)$

4. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1} \ .$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.
La courbe $\mathcal{C}_g$ admet :

a. une asymptote verticale et une asymptote horizontale.

b. une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

c. aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale.

d. aucune asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;\,2]$ par :

$$h(x) = x^2(1 + 2\ln(x)) \quad .$$

On note $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de h dans un repère du plan.
On admet que h est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;2]$.
On note h' sa dérivée et h'' sa dérivée seconde.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;2]$, on a :

$$h'(x) = 4x(1 + \ln(x)) \quad .$$

5. Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;2\right]$, la fonction h s'annule :

a. exactement 0 fois. **b.** exactement 1 fois.

c. exactement 2 fois. **d.** exactement 3 fois.

6. Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_h$ au point d'abscisse $\sqrt{\mathrm{e}}$ est :

a. $y = \left(6\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x$ **b.** $y = \left(6\sqrt{\mathrm{e}}\right) \cdot x + 2\mathrm{e}$

c. $y = 6\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ **d.** $y = \left(6\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) \cdot x - 4\mathrm{e}$

7. Sur l'intervalle $]0\,;2]$, le nombre de points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_h$ est égal à :

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** 3

EXERCICE 3 (7 points)

Principaux domaines abordés :

Suites ;

Fonctions, Fonction exponentielle.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 1 + x - \mathrm{e}^{0,5x-2} \ .$$

On admet que la fonction f est dérivable sur **R**. On note f' sa dérivée.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0,5x\left(2 - \dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}}{0,5x} \times \mathrm{e}^{-2}\right)$.

En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. **a.** Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.

b. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est l'intervalle $]4 + 2\ln(2)\,;+\infty[$.

3. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction f sur **R**. On fera figurer la valeur exacte de l'image de $4 + 2\ln(2)$ par f.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1; 0]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie à la **partie A**.

1. **a**. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 4 \ .$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge. On notera ℓ la limite.

2. **a**. On rappelle que ℓ vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.
Démontrer que $\ell = 4$.

b. On considère la fonction `valeur` écrite ci-contre dans le langage Python :

```
def valeur(a):
    u=0
    n=0
    while u<=a:
        u=1+u-exp(0.5*u-2)
        n=n+1
    return n
```

L'instruction `valeur(3.99)` renvoie la valeur 12.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Géométrie dans l'espace.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère les points $A(5\,;0\,;-1)$, $B(1\,;4\,;-1)$, $C(1\,;0\,;3)$, $D(5\,;4\,;3)$ et $E(10\,;9\,;8)$.

1. **a**. Soit R le milieu du segment [AB].
Calculer les coordonnées du point R ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan passant par le point R et dont $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal.
Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_1$ est :

$$x - y - 1 = 0 \ .$$

c. Démontrer que le point E appartient au plan $\mathcal{P}_1$ et que $EA = EB$.

2. On considère le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation cartésienne $x - z - 2 = 0$.

a. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

b. On note Δ la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}).$$

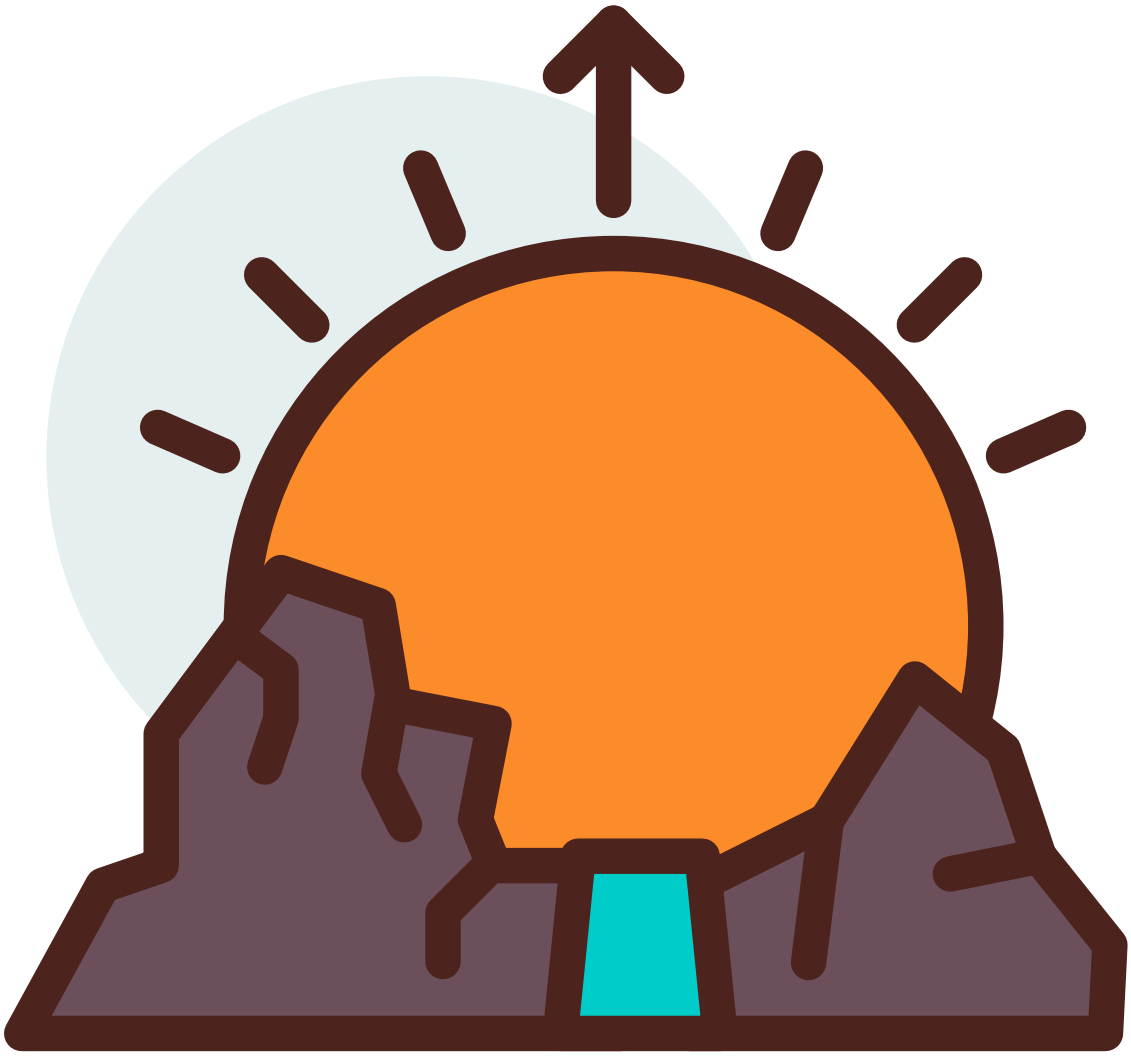
3. On considère le plan $\mathcal{P}_3$ d'équation cartésienne $y + z - 3 = 0$.
Justifier que la droite Δ est sécante au plan $\mathcal{P}_3$ en un point Ω dont on déterminera les coordonnées.

Si S et T sont deux points distincts de l'espace, on rappelle que l'ensemble des points M de l'espace tels que $MS = MT$ est un plan, appelé plan médiateur du segment [ST].
On admet que les plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont les plans médiateurs respectifs des segments [AB], [AC] et [AD].

4. **a.** Justifier que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$.

b. En déduire que les points A, B, C et D appartiennent à une même sphère dont on précisera le centre et le rayon.

23 La Réunion - Jour 2 (22-MATJ2LR1)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**.

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Probabilités.

Les résultats seront arrondis si besoin à 10^{-4} près.

Une étude statistique réalisée dans une entreprise fournit les informations suivantes :

- $48\ \%$ des salariés sont des femmes. Parmi elles, $16{,}5\ \%$ exercent une profession de cadre ;
- $52\ \%$ des salariés sont des hommes. Parmi eux, $21{,}5\ \%$ exercent une profession de cadre.

On choisit une personne au hasard parmi les salariés.
On considère les événements suivants :

- F : « la personne choisie est une femme » ;
- C : « la personne choisie exerce une profession de cadre ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre.

3. **a**. Démontrer que la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à $0{,}191$.

b. Les événements F et C sont-ils indépendants ? Justifier.

4. Calculer la probabilité de F sachant C, notée $\mathrm{P_C(F)}$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. On choisit au hasard un échantillon de 15 salariés. Le grand nombre de salariés dans l'entreprise permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres au sein de l'échantillon de 15 salariés.

On rappelle que la probabilité qu'un salarié choisi au hasard soit un cadre est égale à $0{,}191$.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre.

c. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.

6. Soit n un entier naturel.
On considère dans cette question un échantillon de n salariés.

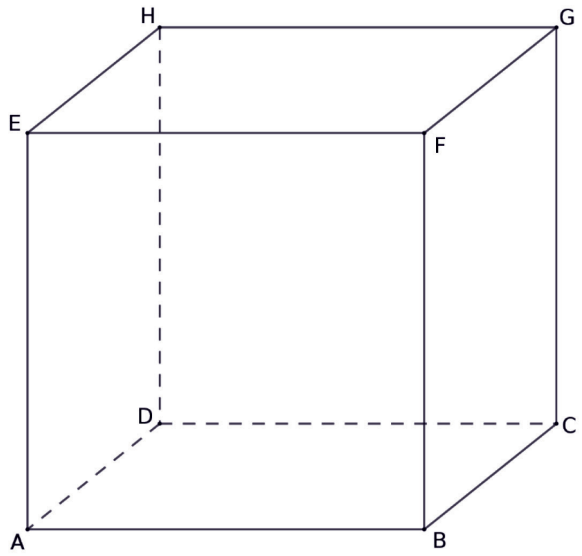
Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à $0{,}99$?

EXERCICE 2 (7 points)

Principaux domaines abordés :

Géométrie dans l'espace.

On considère le cube $\mathrm{ABCDEFGH}$ de côté 1 représenté ci-dessous.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. a. Justifier que les droites (AH) et (ED) sont perpendiculaires.

b. Justifier que la droite (GH) est orthogonale au plan (EDH).

c. En déduire que la droite (ED) est orthogonale au plan (AGH).

2. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{ED}}$.
Déduire de la question **1.c**. qu'une équation cartésienne du plan (AGH) est :

$$y - z = 0\ .$$

3. On désigne par L le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\,1\,;\,0\right)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EL).

b. Déterminer l'intersection de la droite (EL) et du plan (AGH).

c. Démontrer que le projeté orthogonal du point L sur le plan (AGH) est le point K de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

d. Montrer que la distance du point L au plan (AGH) est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

e. Déterminer le volume du tétraèdre LAGH.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}\ .$$

EXERCICE 3 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Fonctions ;
Suites.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit g la fonction définie sur **R** par $g(x) = x^{1000} + x$.
On peut affirmer que :

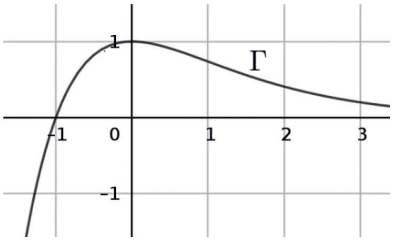
a. la fonction g est concave sur **R**.

b. la fonction g est convexe sur **R**.

c. la fonction g possède exactement un point d'inflexion.

d. la fonction g possède exactement deux points d'inflexion.

2. On considère une fonction f définie et dérivable sur **R**. On note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f .
On note Γ la courbe représentative de f' .
On a tracé ci-contre **la courbe Γ** .
On note T la tangente à **la courbe $\mathcal{C}$** au point d'abscisse 0 .



On peut affirmer que la tangente T est parallèle à la droite d'équation :

a. $y = x$ **b.** $y = 0$

c. $y = 1$ **d.** $x = 0$

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.
On peut affirmer que la suite (u_n) est :

a. majorée et non minorée. **b.** minorée et non majorée.

c. bornée. **d.** non majorée et non minorée.

4. Soit k un nombre réel non nul.
Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel n.
On suppose que $v_0 = k$ et que pour tout n, on a $v_n \times v_{n+1} < 0$.
On peut affirmer que v_{10} est :

a. positif.

b. négatif.

c. du signe de k.

d. du signe de $-k$.

5. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$w_{n+1} = 2w_n - 4 \quad \text{et} \quad w_2 = 8.$$

On peut affirmer que :

a. $w_0 = 0$.

b. $w_0 = 5$.

c. $w_0 = 10$.

d. Il n'est pas possible de calculer w_0.

6. On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$a_{n+1} = \frac{e^n}{e^n+1} a_n \quad \text{et} \quad a_0 = 1.$$

On peut affirmer que :

a. la suite (a_n) est strictement croissante.

b. la suite (a_n) est strictement décroissante.

c. la suite (a_n) n'est pas monotone.

d. la suite (a_n) est constante.

7. Une cellule se reproduit en se divisant en deux cellules identiques, qui se divisent à leur tour, et ainsi de suite. On appelle *temps de génération* le temps nécessaire pour qu'une cellule donnée se divise en deux cellules. On a mis en culture 1 cellule. Au bout de 4 heures, il y a environ 4000 cellules.

On peut affirmer que le temps de génération est environ égal à :

a. moins d'une minute.

b. 12 minutes.

c. 20 minutes.

d. 1 heure.

EXERCICE 4 (7 points)

Principaux domaines abordés :

Fonctions, Fonction exponentielle, Fonction logarithme ;
Suites.

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $]0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} + \ln(x) \ .$$

1. Calculer la limite de f en 0.

2. On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,1]$. On note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,1]$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - x\mathrm{e}^{-x}}{x} \quad .$$

3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]0\,;\,1]$, on a $x\mathrm{e}^{-x} < 1$.
En déduire le tableau de variation de f sur $]0\,;\,1]$.

4. Démontrer qu'il existe un unique réel ℓ appartenant à $]0\,;\,1]$ tel que $f(\ell) = 0$.

Partie B

1. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{10} \\ b_0 = 1 \end{cases} \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} = \mathrm{e}^{-a_n} \end{cases}$$

a. Calculer a_1 et b_1. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b. On considère ci-dessous la fonction `termes`, écrite en langage Python.

```
def termes(n):
  a=1/10
  b=1
  for k in range(0,n):
     c=...
     b=...
     a=c
  return(a,b)
```

Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction `termes` calcule les termes des suites (a_n) et (b_n) .

2. On rappelle que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur **R**.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1 .$$

b. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

3. On note A la limite de (a_n) et B la limite de (b_n).

On admet que A et B appartiennent à l'intervalle $]0 ; 1]$, et que $A = \mathrm{e}^{-B}$ et $B = \mathrm{e}^{-A}$.

a. Démontrer que $f(A) = 0$.

b. Déterminer $A - B$.

24 Amérique du Nord - Jour 1 (22-MATJ1AN1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices.**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points) — Thème : probabilités

Chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela, il prend son vélo deux fois sur trois et, s'il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.

1. Lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur cinquante alors que, lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare, Paul rate son train une fois sur dix.

On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul se rend à la gare pour prendre le train qui le conduira au travail.

On note :

- V l'événement « Paul prend son vélo pour rejoindre la gare » ;
- R l'événement « Paul rate son train ».

a. Faire un arbre pondéré résumant la situation.

b. Montrer que la probabilité que Paul rate son train est égale à $\frac{7}{150}$.

c. Paul a raté son train. Déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo pour rejoindre la gare.

2. On choisit au hasard un mois pendant lequel Paul s'est rendu 20 jours à la gare pour rejoindre son lieu de travail selon les modalités décrites en préambule. On suppose que, pour chacun de ces 20 jours, le choix entre le vélo et la voiture est indépendant des choix des autres jours.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Paul prend son vélo sur ces 20 jours.

a. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

b. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare ? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

c. Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare ? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

d. En moyenne, combien de jours sur une période choisie au hasard de 20 jours pour se rendre à la gare, Paul prend-il son vélo ? On arrondira la réponse à l'entier.

3. Dans le cas où Paul se rend à la gare en voiture, on note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes, arrondie à la minute.

La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous :

k (en minutes)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(T = k)$	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 (7 points) — Thème : suites

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ T_{n+1} = 0{,}955\, T_n + 0{,}9.$$

1. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $T_n \geq 20$.

b. Vérifier que pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0{,}045(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n).

c. Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = T_n - 20$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 20 + 160 \times 0{,}955^n$.

c. Calculer la limite de la suite (T_n).

d. Résoudre l'inéquation $T_n \leq 120$ d'inconnue n entier naturel.

3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four. On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180°C et celle de l'air ambiant de 20°C. La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n). Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

a. Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question **2. c.** était prévisible dans le contexte de l'exercice.

b. On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp( x ) :
    T=180
    n=0
    while T>x :
        T=0.955*T+0.9
        n=n+1
    return n
```

Donner le résultat obtenu en exécutant la commande **temp(120)**.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 (7 points) **Thème : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\ )$ d'unité 1 cm, on considère les points suivants :
$J(2,0,1)$, $K(1,2,1)$ et $L(-2,-2,-2)$.

1. a. Montrer que le triangle JKL est rectangle en J.

b. Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle JKL en cm^2.

c. Déterminer une valeur approchée au dixième près de l'angle géométrique $\widehat{JKL}$.

2. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (JKL).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (JKL).

Dans la suite, T désigne le point de coordonnées $(10,9,-6)$.

3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (JKL) et passant par T.

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point T sur le plan (JKL).

c. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$V = \frac{1}{3}B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

Calculer la valeur exacte du volume du tétraèdre JKLT en cm^3.

EXERCICE 4 (7 points) **Thème : fonction exponentielle**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. Affirmation 1 : Pour tout réel x : $1 - \frac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

2. On considère la fonction g définie sur **R** par $g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$.

Affirmation 2 : L'équation $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution dans **R**.

3. On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$ et on note C sa courbe dans un repère orthonormé.

Affirmation 3 : L'axe des abscisses est tangent à la courbe C en un seul point.

4. On considère la fonction h définie sur **R** par $h(x) = \mathrm{e}^x(1-x^2)$.

Affirmation 4 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction h n'admet pas de point d'inflexion.

5. Affirmation 5 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+x} = 0.$

6. Affirmation 6 : Pour tout réel x, $1 + \mathrm{e}^{2x} \geq 2\mathrm{e}^x$.

25 Amérique du Nord - Jour 2 (22-MATJ2AN1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.

Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices.**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Exercice 1 (7 points) Thèmes : probabilités, suites

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distincts, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un ou l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- si un vélo se trouve au point B un matin, la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

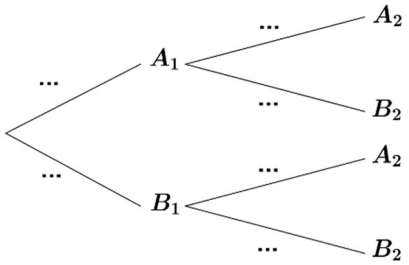
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les événements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin » ;
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'événement A_n et b_n la probabilité de l'événement B_n. Ainsi $a_1 = 0{,}5$ et $b_1 = 0{,}5$.

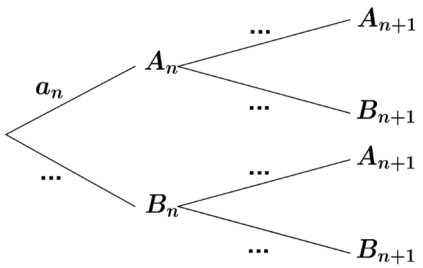
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins.



2. a. Calculer a_2.

b. Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.

3. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième matins.



b. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0{,}6\, a_n + 0{,}24$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.

5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geq 0{,}599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 (7 points) Thèmes : fonctions, fonction exponentielle

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1.$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signe de la fonction p sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$ par :

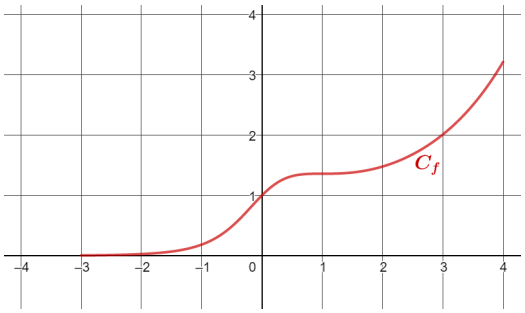
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}.$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

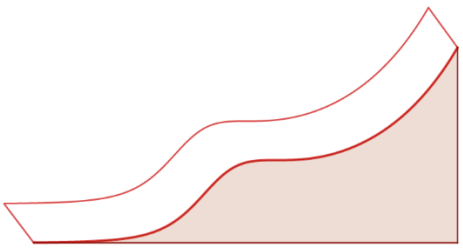
1. **a.** Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\,;\,4]$.

   b. Justifier que la courbe C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe C_f comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe C_f



Vue de profil du toboggan

   a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

   b. On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\,;\,4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^3}$$

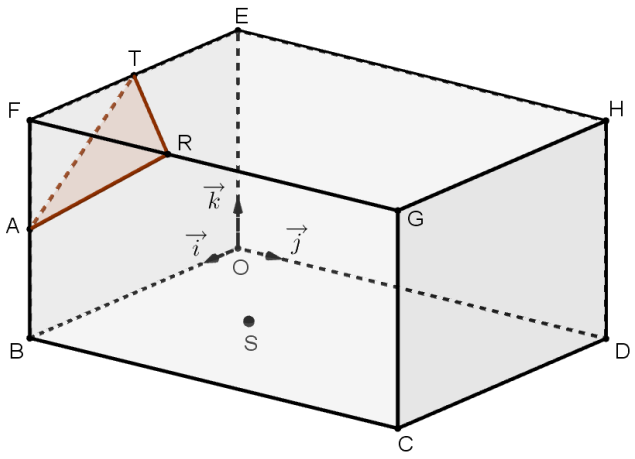
   où p est la fonction définie dans la **partie A**.

   En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Exercice 3 (7 points) — Thème : géométrie dans l'espace

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8 m et de hauteur 4 m. Elle est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH où $OB = 6$ m, $OD = 8$ m et $OE = 4$ m.

On utilise le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$ tel que $\vec{\imath} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{8}\overrightarrow{OD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OE}$.



Dans ce repère, on a, en particulier : $C(6, 8, 0)$, $F(6, 0, 4)$ et $G(6, 8, 4)$.

Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets $A(6, 0, 2)$, $R(6, 3, 4)$ et $T(3, 0, 4)$. Enfin, S est le point de coordonnées $\left(3,\ \frac{5}{2}, 0\right)$.

1. a. Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT}$.

c. En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{RAT}$.

2. a. Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ART).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ART).

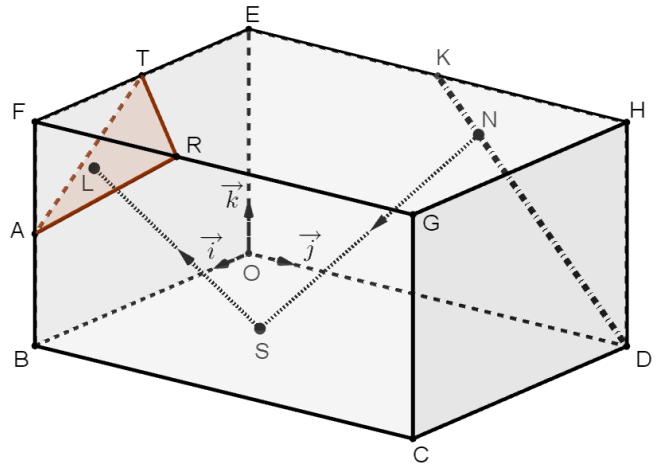
3. Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).

a. Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S.
Justifier que le système ci-dessous est une représentation paramétrique de la droite Δ :

$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \dfrac{5}{2} - 2k \quad \text{avec } k \in \mathbf{R}. \\ z = 3k \end{cases}$$

b. Soit L le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (ART). Démontrer que L a pour coordonnées $\left(5,\ \frac{1}{2}, 3\right)$.

4. L'artiste installe un rail représenté par le segment [DK] où K est le milieu du segment [EH].
Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N du segment [DK] et il oriente ce second rayon laser vers le point S.



a. Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;1]$, le point N de coordonnées $(0\,,\ 8-4t\ ,\ 4t)$ est un point du segment [DK].

b. Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments [SL] et [SN] soient perpendiculaires.

Exercice 4 (7 points) Thèmes : fonction logarithme népérien, probabilités

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM) qui comprend six questions. Les six questions sont indépendantes. Pour chacune des questions, ***une seule des quatre réponses est exacte****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivie de la lettre correspondant à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.*

Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Question 1

Le réel a défini par $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ est égal à :

a) $1-\frac{1}{2}\ln(3)$ b) $\frac{1}{2}\ln(3)$ c) $3\ln(3)+\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}\ln(3)$

Question 2

On note (E) l'équation suivante $\ln x + \ln(x-10) = \ln 3 + \ln 7$ d'inconnue le réel x.

a) 3 est solution de (E).

b) $5-\sqrt{46}$ est solution de (E).

c) L'équation (E) admet une unique solution réelle.

d) L'équation (E) admet deux solutions réelles distinctes.

Question 3

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par l'expression $f(x) = x^2(-1+\ln x)$.
On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

a) Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$.

b) La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c) $f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ est différent de 0.

d) La droite d'équation $y = -\frac{1}{2}\mathrm{e}$ est tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $\sqrt{\mathrm{e}}$.

Question 4

Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac.
La probabilité de tirer exactement 2 jetons jaunes, arrondie au millième, est :

a) 0,683 b) 0,346 c) 0,230 d) 0,165

Question 5

Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. La probabilité de tirer au moins un jeton jaune, arrondie au millième, est :

a) 0,078 b) 0,259 c) 0,337 d) 0,922

Question 6

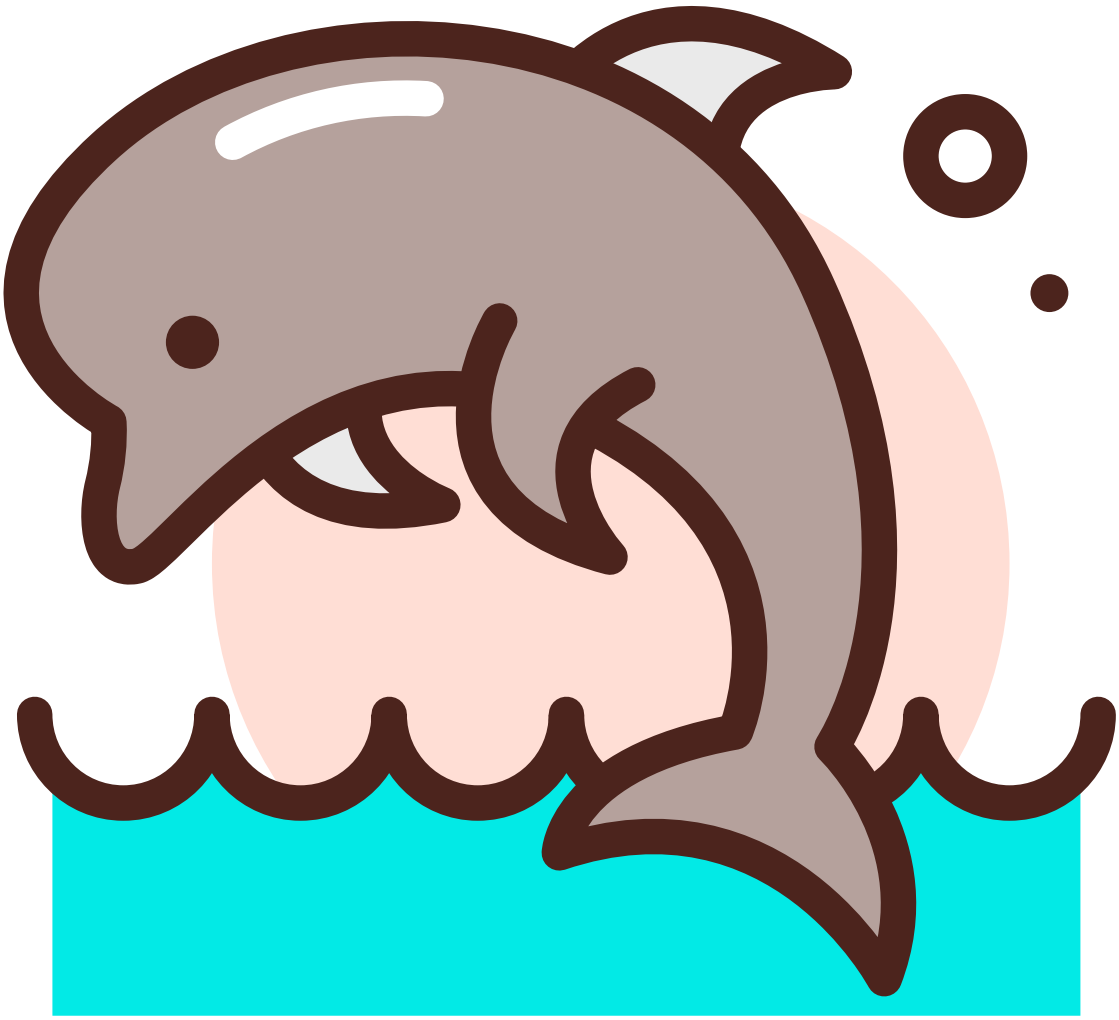
Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus.

On réalise l'expérience aléatoire suivante : on tire successivement et avec remise 5 jetons du sac. On note le nombre de jetons jaunes obtenus après ces 5 tirages.

Si on répète cette expérience aléatoire un très grand nombre de fois alors, en moyenne, le nombre de jetons jaunes tirés est égal à :

a) 0,4 b) 1,2 c) 2 d) 2,5

26 Polynésie - Jour 1 Remplacement (22-MATJ1PO3)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.

Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas ;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie 1

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.

On considère les événements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques » ;
- T : « le test est positif » ;
- $\bar{A}$ et $\bar{T}$ sont respectivement les événements contraires de A et T.

1. Calculer $\mathrm{P}(A \cap T)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que $\mathrm{P}(T) = 0{,}2625$.

3. On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.

4. **a.** Parmi les événements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test : $A \cap T$, $\bar{A} \cap T$, $A \cap \bar{T}$, $\bar{A} \cap \bar{T}$.

b. On définit l'événement E : « le test fournit un résultat erroné ».
Démontrer que $\mathrm{P}(E) = 0{,}0625$.

Partie 2

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés.
On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}0625$.

b. Calculer P(X=7).

c. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.

2. Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geqslant 10)$ soit supérieure à 0,95 ?

Soit k un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes. On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de *k*.

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1{,}9$ et $u_0 = 0{,}1$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}9u_n(1 - u_n)$.

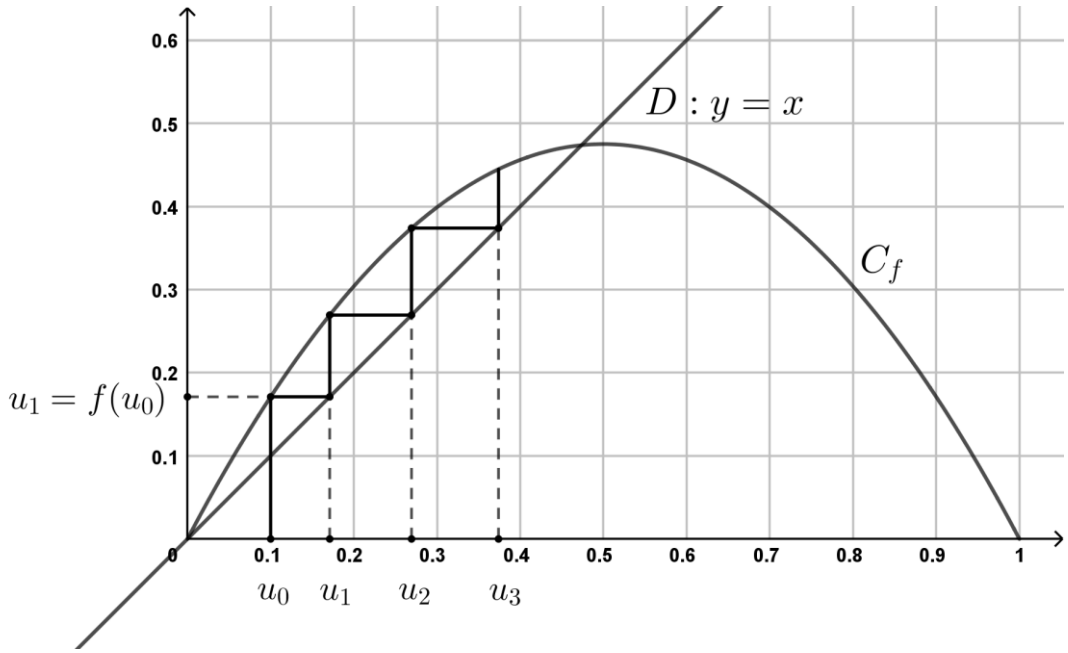
1. On considère la fonction f définie sur $[0\ ;1]$ par $f(x) = 1{,}9x(1 - x)$.

a. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;1]$.

b. En déduire que si $x \in \left[0\ ;\frac{1}{2}\right]$ alors $f(x) \in \left[0\ ;\frac{1}{2}\right]$.

2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe C_f de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.

Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. **a.** En utilisant les résultats de la question **1**, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

c. Déterminer sa limite.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

2. On considère la fonction Python `algo(p)` où `p` désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :
    u = 1/4
    n = 0
    while u > 10**(-p) :
        u = 1/2*u*(1-u)
        n = n+1
    return(n)
```

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul `p`, la boucle `while` ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo(p)` de renvoyer une valeur.

Partie 1

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle]0 ; + ∞[par :

$$g(x) = \frac{2\ln x}{x}.$$

1. On note g' la dérivée de g. Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x^2}$$

2. On dispose de ce tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle]0 ; +∞[:

x	0	1	e	$+\infty$
Variations de g	$-\infty$	0	$\frac{2}{e}$	0

Justifier les informations suivantes lues dans ce tableau :

a. la valeur $\frac{2}{e}$;

b. les variations de la fonction g sur son ensemble de définition ;

c. les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.

3. En déduire le tableau de signes de la fonction g sur l'intervalle]0 ; +∞[.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0 ; + ∞[par $f(x) = (\ln(x))^2$.

Dans cette partie, chaque étude est effectuée sur l'intervalle]0 ; +∞[.

1. Démontrer que sur l'intervalle]0 ; +∞[, la fonction f est une primitive de la fonction g.

2. À l'aide de la **partie 1**, étudier :

a. la convexité de la fonction f ;

b. les variations de la fonction f.

3. **a.** Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse e.

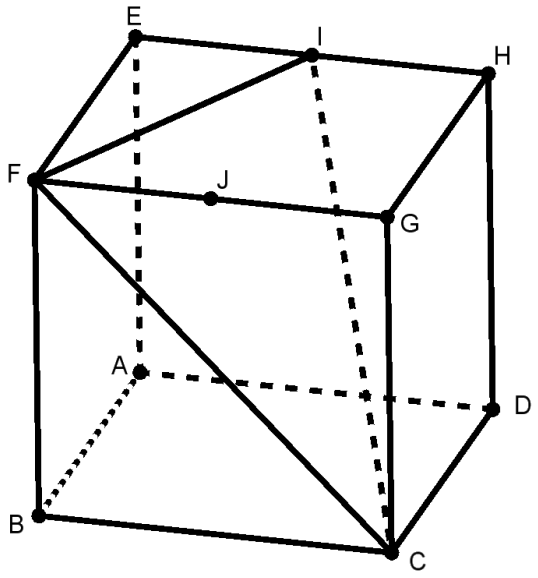
b. En déduire que, pour tout réel x dans $]0 ; e]$:

$$(\ln(x))^2 \geqslant \frac{2}{e}x - 1.$$

EXERCICE 4 (7 points) **Thème : géométrie dans le plan et dans l'espace**

On considère le cube ABCDEFGH. On note I le milieu du segment [EH] et on considère le triangle CFI.

L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et on admet que le point I a pour coordonnées $\left(0 ; \frac{1}{2} ; 1\right)$ dans ce repère.



1.

a. Donner sans justifier les coordonnées des points C, F et G.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (CFI).

c. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (CFI) est : $x + 2y + 2z - 3 = 0$.

2. On note *d* la droite passant par G et orthogonale au plan (CFI).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite *d*.

b. Démontrer que le point K $\left(\frac{7}{9} ; \frac{5}{9} ; \frac{5}{9}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (CFI).

c. Déduire des questions précédentes que la distance du point G au plan (CFI) est égale à $\frac{2}{3}$.

3. On considère la pyramide GCFI.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times b \times h$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

a. Démontrer que le volume de la pyramide GCFI est égal à $\frac{1}{6}$, exprimé en unité de volume.

b. En déduire l'aire du triangle CFI, en unité d'aire.

27 Métropole - Jour 1 Remplacement (22-MATJ1ME3)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices.**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Exercice 1 (7 points) **Thèmes : fonctions, suites**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{2e^x}{e^x+1}$.

La courbe représentative de la fonction g admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation :

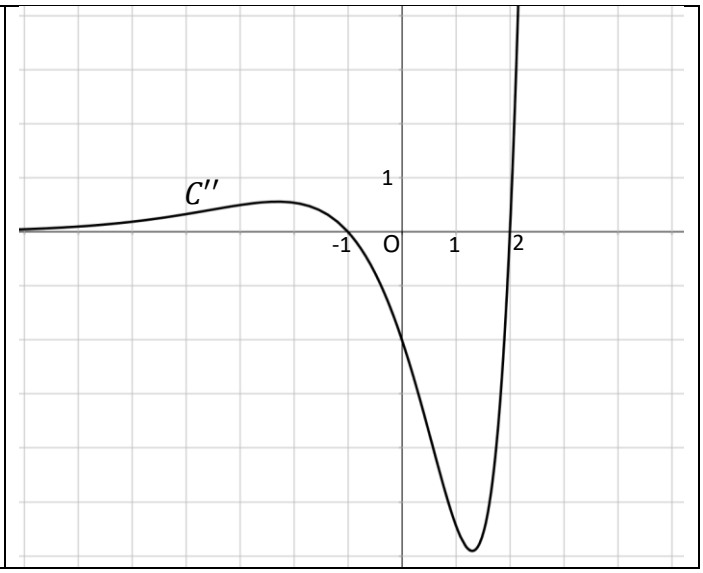
a. $x = 2$; **b.** $y = 2$; **c.** $y = 0$; **d.** $x = -1$.

2.

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On appelle C sa représentation graphique.

On désigne par f'' la dérivée seconde de f.

On a représenté sur le graphique ci-contre la courbe de f'', notée C'' .



a. C admet un unique point d'inflexion ; **b.** f est convexe sur l'intervalle $[-1; 2]$;

c. f est convexe sur $]-\infty ; -1]$ et sur $[2 ; +\infty[$; **d.** f est convexe sur $\mathbb{R}$.

3. On donne la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

La suite (v_n), définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2$, est :

a. arithmétique de raison -2 ; **b.** géométrique de raison -2 ;

c. arithmétique de raison 1 ; **d.** géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

4. On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq u_n \leq 2 - \frac{n}{n+1}$$

On peut affirmer que la suite (u_n) :

a. converge vers 2 ; **b.** converge vers 1 ; **c.** diverge vers $+\infty$; **d.** n'a pas de limite.

5. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2\ln x$.

Une primitive F de f sur $]0;+\infty[$ est définie par :

a. $F(x)=\frac{1}{3}x^3\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)$; **b.** $F(x)=\frac{1}{3}x^3(\ln x-1)$;

c. $F(x)=\frac{1}{3}x^2$; **d.** $F(x)=\frac{1}{3}x^2(\ln x-1)$.

6. Pour tout réel x, l'expression $2+\frac{3e^{-x}-5}{e^{-x}+1}$ est égale à :

a. $\frac{5-3e^x}{1+e^x}$; **b.** $\frac{5+3e^x}{1-e^x}$; **c.** $\frac{5+3e^x}{1+e^x}$; **d.** $\frac{5-3e^x}{1-e^x}$.

Exercice 2 (7 points) **Thème : probabilités**

Un hôtel situé à proximité d'un site touristique dédié à la préhistoire propose deux visites dans les environs, celle d'un musée et celle d'une grotte.

Une étude a montré que 70% des clients de l'hôtel visitent le musée. De plus, parmi les clients visitant le musée, 60% visitent la grotte.
Cette étude montre aussi que 6% des clients de l'hôtel ne font aucune visite.

On interroge au hasard un client de l'hôtel et on note :

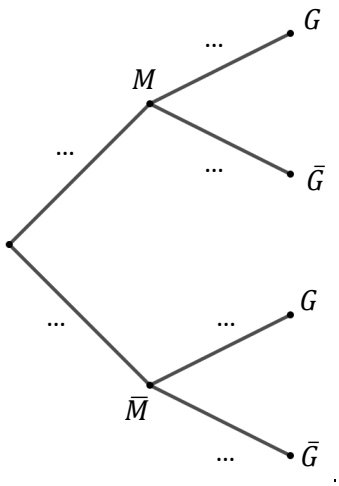
- M l'événement : « le client visite le musée » ;
- G l'événement : « le client visite la grotte ».

On note $\overline{M}$ l'événement contraire de M, $\bar{G}$ l'événement contraire de G, et pour tout événement E, on note $p(E)$ la probabilité de E.

Ainsi, d'après l'énoncé, on a : $p(\overline{M}\cap\bar{G})=0{,}06$.

1. **a.** Vérifier que $p_{\overline{M}}(\bar{G})=0{,}2$, où $p_{\overline{M}}(\bar{G})$ désigne la probabilité que le client interrogé ne visite pas la grotte sachant qu'il ne visite pas le musée.

b. L'arbre pondéré ci-contre modélise la situation. Recopier et compléter cet arbre en indiquant sur chaque branche la probabilité associée.



c. Quelle est la probabilité de l'événement « le client visite la grotte et ne visite pas le musée » ?

d. Montrer que $p(G)=0{,}66$.

2. Le responsable de l'hôtel affirme que parmi les clients qui visitent la grotte, plus de la moitié visitent également le musée. Cette affirmation est-elle exacte ?

3. Les tarifs pour les visites sont les suivants :

- visite du musée : 12 euros ;
- visite de la grotte : 5 euros.

On considère la variable aléatoire T qui modélise la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites.

a. Donner la loi de probabilité de T. On présentera les résultats sous la forme d'un tableau.

b. Calculer l'espérance mathématique de T.

c. Pour des questions de rentabilité, le responsable de l'hôtel estime que le montant moyen des recettes des visites doit être supérieur à 700 euros par jour. Déterminer le nombre moyen de clients par journée permettant d'atteindre cet objectif.

4. Pour augmenter les recettes, le responsable souhaite que l'espérance de la variable aléatoire modélisant la somme dépensée par un client de l'hôtel pour ces visites passe à 15 euros, sans modifier le prix de visite du musée qui demeure à 12 euros. Quel prix faut-il fixer pour la visite de la grotte afin d'atteindre cet objectif ? (On admettra que l'augmentation du prix d'entrée de la grotte ne modifie pas la fréquentation des deux sites).

5. On choisit au hasard 100 clients de l'hôtel, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité qu'au moins les trois quarts de ces clients aient visité la grotte à l'occasion de leur séjour à l'hôtel ? On donnera une valeur du résultat à 10^{-3} près.

Exercice 3 (7 points) **Thèmes : fonctions logarithme et exponentielle, suites**

Les parties A et B sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Donner la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que, pour tout nombre réel $x \geq 1$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

b. Justifier le tableau de signes suivant, donnant le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	

c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

3. Soit k un nombre réel positif ou nul.

a. Montrer que, si $0 \leq k \leq \frac{1}{e}$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;e]$.

b. Si $k > \frac{1}{e}$, l'équation $f(x)=k$ admet-elle des solutions sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$? Justifier.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{\frac{x}{4}}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = e^{\frac{u_n}{4}} \text{ c'est-à-dire : } u_{n+1} = g(u_n)$$

1. Justifier que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq u_{n+1} \leq e$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On note ℓ la limite de la suite (u_n), et on admet que ℓ est solution de l'équation :

$$e^{\frac{x}{4}} = x.$$

4. En déduire que ℓ est solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$, où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite ℓ de la suite (u_n).

Exercice 4 (7 points) **Thème : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points $A(-1\,;-1\,;3)$, $B(1\,;1\,;2)$, $C(1\,;-1\,;7)$.
On considère également la droite Δ passant par les points $D(-1\,;6\,;8)$ et $E(11\,;-9\,;2)$.

1. a. Vérifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 6 - 5t \\ z = 8 - 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

b. Préciser une représentation paramétrique de la droite Δ′ parallèle à Δ et passant par l'origine O du repère.

c. Le point $F(1{,}36\,;-1{,}7\,;-0{,}7)$ appartient-il à la droite Δ′ ?

2.a. Montrer que les points A, B et C définissent un plan.

b. Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC).

c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $4x - 5y - 2z + 5 = 0$.

3.a. Montrer que le point $G(7;-4;4)$ appartient à la droite Δ.

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point G sur le plan (ABC).

c. En déduire que la distance du point G au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{5}$.

4.a. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b. Calculer le volume V du tétraèdre $ABCG$.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondant à cette base.

28 Métropole - Jour 2 Remplacement (22-MATJ2ME3)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le sujet propose 4 exercices.
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices.**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

Exercice 1 (7 points) **Thème : probabilités**

Dans le magasin d'Hugo, les clients peuvent louer deux types de vélos : vélos de route ou bien vélos tout terrain. Chaque type de vélo peut être loué dans sa version électrique ou non.
On choisit un client du magasin au hasard, et on admet que :

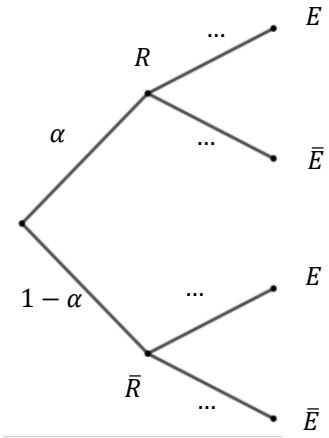
- Si le client loue un vélo de route, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,4 ;
- Si le client loue un vélo tout terrain, la probabilité que ce soit un vélo électrique est de 0,7 ;
- La probabilité que le client loue un vélo électrique est de 0,58.

On appelle α la probabilité que le client loue un vélo de route, avec $0 \leq \alpha \leq 1$.

On considère les événements suivants :

- R : « le client loue un vélo de route » ;
- E : « le client loue un vélo électrique » ;
- $\bar{R}$ et $\bar{E}$, événements contraires de R et E.

On modélise cette situation aléatoire à l'aide de l'arbre reproduit ci-contre :



Si F désigne un événement quelconque, on notera $p(F)$ la probabilité de F.

1. Recopier cet arbre sur la copie et le compléter.
2. **a.** Montrer que $p(E) = 0{,}7 - 0{,}3\alpha$.

   b. En déduire que : $\alpha = 0{,}4$.
3. On sait que le client a loué un vélo électrique. Déterminer la probabilité qu'il ait loué un vélo tout terrain. On donnera le résultat arrondi au centième.
4. Quelle est la probabilité que le client loue un vélo tout terrain électrique ?
5. Le prix de la location à la journée d'un vélo de route non électrique est de 25 euros, celui d'un vélo tout terrain non électrique de 35 euros. Pour chaque type de vélo, le choix de la version électrique augmente le prix de location à la journée de 15 euros. On appelle X la variable aléatoire modélisant le prix de location d'un vélo à la journée.
   a. Donner la loi de probabilité de X. On présentera les résultats sous forme d'un tableau.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.
6. Lorsqu'on choisit 30 clients d'Hugo au hasard, on assimile ce choix à un tirage avec remise. On note Y la variable aléatoire associant à un échantillon de 30 clients choisis au hasard le nombre de clients qui louent un vélo électrique.

On rappelle que la probabilité de l'événement E est : $p(E) = 0{,}58$.

a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne exactement 20 clients qui louent un vélo électrique. On donnera le résultat arrondi au millième.

c. Déterminer la probabilité qu'un échantillon contienne au moins 15 clients qui louent un vélo électrique. On donnera le résultat arrondi au millième.

Exercice 2 (7 points) **Thèmes : suites, fonctions**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère les suites (a_n) et (b_n) définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}5a_n + 1$ et $b_n = a_n - 2$.
On peut affirmer que :

a. (a_n) est arithmétique ; **b.** (b_n) est géométrique ;
c. (a_n) est géométrique ; **d.** (b_n) est arithmétique.

Dans les questions **2**. et **3.**, on considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = 2$, $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$.

2. On peut affirmer que :

a. $\begin{cases} u_2 = 5 \\ v_2 = 3 \end{cases}$; **b.** $u_2^2 - 3v_2^2 = -2^2$; **c.** $\frac{u_2}{v_2} = 1{,}75$; **d.** $5u_1 = 3v_1$.

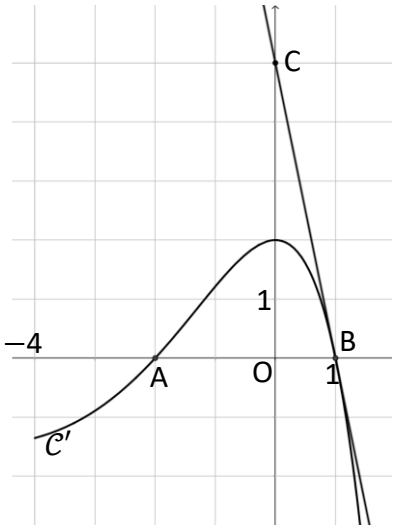
3. On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python :

```
def valeurs() :
    u = 2
    v = 1
    for k in range(1,11) :
        c = u
        u = u+3*v
        v = c+v
    return (u,v)
```

Ce programme renvoie :

a. u_{11} et v_{11} ; **b.** u_{10} et v_{11} ; **c.** les valeurs de u_n et v_n pour n allant de 1 à 10 ; **d.** u_{10} et v_{10} .

Pour les questions **4.** et **5.**, on considère une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4\,;2]$. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la dérivée seconde de f.
On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}'$ de **la fonction dérivée f'** dans un repère du plan. On donne de plus les points A$(-2;0)$, B$(1;0)$ et C$(0;5)$.



4. La fonction f est :
a. concave sur $[-2;1]$; **b.** convexe sur $[-4;0]$;
c. convexe sur $[-2;1]$; **d.** convexe sur $[0;2]$.

5. On admet que la droite (BC) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}'$ au point B.
On a :
a. $f'(1)<0$; **b.** $f'(1)=5$;
c. $f''(1)>0$; **d.** $f''(1)=-5$.

6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2+1)e^x$.
La primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=1$ est définie par :
a. $F(x)=(x^2-2x+3)e^x$; **b.** $F(x)=(x^2-2x+3)e^x-2$;
c. $F(x)=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)e^x+1$; **d.** $F(x)=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)e^x$.

Exercice 3 (7 points) **Thèmes : fonction logarithme, suites**

Les parties B et C sont indépendantes.

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-x\ln x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

a. Démontrer que, pour tout réel $x>0$, on a : $f'(x)=-\ln x$.

b. En déduire les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

4. Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0{,}5 \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n - u_n \ln u_n \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0{,}5; 1]$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0{,}5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

2. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b. On note l la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de l.

Partie C

Pour un nombre réel k quelconque, on considère la fonction f_k définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_k(x) = kx - x \ln x$$

1. Pour tout nombre réel k, montrer que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = e^{k-1}$.

2. Vérifier que, pour tout nombre réel k, on a : $x_k = y_k$.

Exercice 4 (7 points) **Thème : géométrie dans l'espace**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère :

- la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A(2; 4; 0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- la droite $\mathcal{D}'$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u'}$ de la droite $\mathcal{D}'$.

b. Montrer que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

On admet dans la suite de cet exercice qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Cette droite Δ coupe chacune des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. On appellera M le point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}$, et M' le point d'intersection de Δ et $\mathcal{D}'$.

On se propose de déterminer la distance MM' appelée « distance entre les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ».

2. Montrer que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

3. On note $\mathcal{P}$ le plan contenant les droites $\mathcal{D}$ et Δ, c'est-à-dire le plan passant par le point A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

b. En déduire qu'une équation du plan $\mathcal{P}$ est : $2x - y - 5z = 0$.

c. On rappelle que M' est le point d'intersection des droites Δ et $\mathcal{D}'$. Justifier que M' est également le point d'intersection de $\mathcal{D}'$ et du plan $\mathcal{P}$.
En déduire que les coordonnées du point M' sont $(3; 1; 1)$.

4. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. Justifier que le point M a pour coordonnées $(1; 2; 0)$.

c. Calculer la distance MM'.

5. On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5t \\ y = 2 + 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que la droite d est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

b. On note ℓ la distance d'un point N de la droite d au plan $\mathcal{P}$. Exprimer le volume du tétraèdre $ANMM'$ en fonction de ℓ.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

c. Justifier que, si N_1 et N_2 sont deux points quelconques de la droite d, les tétraèdres AN_1MM'et AN_2MM' ont le même volume.

29 Amérique du Sud - Jour 1 (22-MATJ1AS1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points) [Probabilités]

PARTIE A

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de $0,97$.

La probabilité qu'un danger se présente est de $0,01$ et la probabilité que l'alarme s'active est de $0,01465$.

On note A l'événement « l'alarme s'active » et D l'événement « un danger se présente ». On note $\overline{M}$ l'événement contraire d'un événement M et $P(M)$ la probabilité de l'événement M.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.

2. **a.** Calculer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active.

b. En déduire la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active. Arrondir le résultat à 10^{-3}.

3. Montrer que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est $0,005$.

4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.

Montrer que la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est inférieure à $0,01$.

PARTIE B

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

On note S l'événement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que $P(S) = 0,00525$.

On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés.

Les résultats seront arrondis à 10^{-4}.

1. Donner la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

3. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

PARTIE C

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à $0,07$.

EXERCICE 2 (7 points) [Suites]

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$.

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.

b. Recopier et compléter la fonction ci-dessous écrite en langage Python.
Cette fonction est nommée *suite_u* et prend pour paramètre l'entier naturel p.
Elle renvoie la valeur du terme de rang p de la suite (u_n).

```
def suite_u(p):
    u=...
    for i in range(1,...):
        u=...
    return u
```

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 4$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. **a.** Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'égalité $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$.

b. En déduire la valeur de ℓ.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$.

b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2.

c. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de w_n en fonction de n et montrer que $v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$.

5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

EXERCICE 3 (7 points) [Fonctions, fonction logarithme]

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=1+x^2(1-2\ln(x))$.

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

PARTIE A

1. Justifier que $g(\mathrm{e})$ est strictement négatif.

2. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

3. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$, $g'(x)=-4x\ln(x)$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4. Déduire de ce qui précède le signe de la fonction g sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

PARTIE B

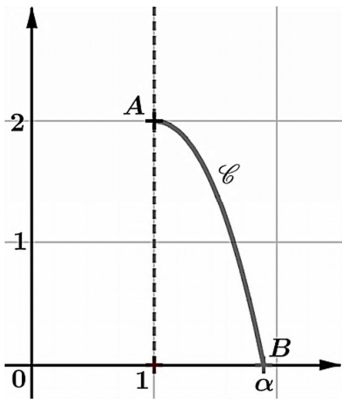
1. On admet que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;\alpha]$, $g''(x)=-4(\ln(x)+1)$.

Justifier que la fonction g est concave sur l'intervalle $[1;\alpha]$.

2. Sur la figure ci-contre, A et B sont les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1 et α.

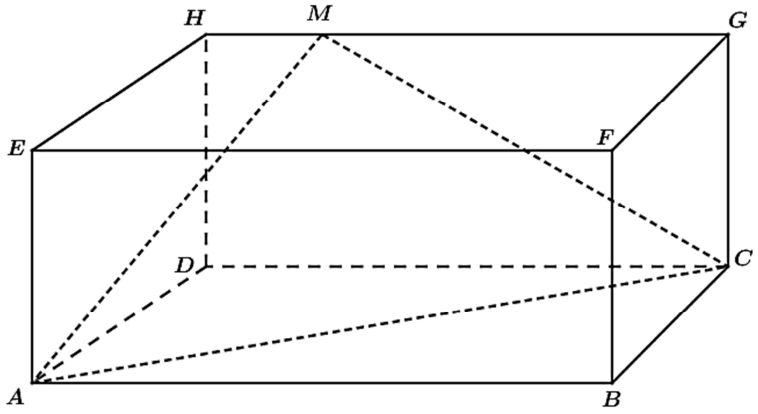
a. Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

b. En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[1;\alpha]$, $g(x)\geq\dfrac{-2}{\alpha-1}x+\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$.



EXERCICE 4 (7 points) [Géométrie dans l'espace]

Dans la figure ci-dessous, $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle tel que $AB=5$, $AD=3$ et $AE=2$.
L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées $(5;0;0)$, $(0;3;0)$ et $(0;0;2)$.



1. **a**. Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (GH).

2. Soit M un point du segment $[GH]$ tel que $\overrightarrow{HM}=k\overrightarrow{HG}$ avec k un nombre réel de l'intervalle $[0;1]$.

a. Justifier que les coordonnées de M sont $(5k;3;2)$.

b. En déduire que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM}=25k^2-25k+4$.

c. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est un triangle rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1;3;2)$.
On admet que le triangle AMC est rectangle en M.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\frac{1}{3}\times Aire\ de\ la\ base\times h$ où h est la hauteur relative à la base.

3. On considère le point K de coordonnées $(1;3;0)$.

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD).

b. Justifier que le point K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).

c. En déduire le volume du tétraèdre $MACD$.

4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).

Calculer la distance DP ; en donner une valeur arrondie à 10^{-1}.

30 Amérique du Sud - Jour 2 (22-MATJ2AS1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points) [probabilités]

Une entreprise fabrique des composants pour l'industrie automobile. Ces composants sont conçus sur trois chaînes de montage numérotées de 1 à 3.

- La moitié des composants est conçue sur la chaîne n°1 ;
- 30 % des composants sont conçus sur la chaîne n°2 ;
- les composants restant sont conçus sur la chaîne n°3.

À l'issue du processus de fabrication, il apparaît que 1 % des pièces issues de la chaîne n°1 présentent un défaut, de même que 0,5 % des pièces issues de la chaîne n°2 et 4 % des pièces issues de la chaîne n°3.

On prélève au hasard un de ces composants. On note :

- C_1 l'événement « le composant provient de la chaîne n°1 » ;
- C_2 l'événement « le composant provient de la chaîne n°2 » ;
- C_3 l'événement « le composant provient de la chaîne n°3 » ;
- D l'événement « le composant est défectueux » et $\overline{D}$ son événement contraire.

Dans tout l'exercice, les calculs de probabilité seront donnés en valeur décimale exacte ou arrondie à 10^{-4} *si nécessaire.*

PARTIE A

1. Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le composant prélevé provienne de la chaîne n°3 et soit défectueux.
3. Montrer que la probabilité de l'événement D est $P(D) = 0,0145$.
4. Calculer la probabilité qu'un composant défectueux provienne de la chaîne n°3.

PARTIE B

L'entreprise décide de conditionner les composants produits en constituant des lots de n unités. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de n unités, associe le nombre de composants défectueux de ce lot. Compte tenu des modes de production et de conditionnement de l'entreprise, on peut considérer que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,0145$.

1. Dans cette question, les lots possèdent 20 unités. On pose $n = 20$.
   a. Calculer la probabilité pour qu'un lot possède exactement trois composants défectueux.
   b. Calculer la probabilité pour qu'un lot ne possède aucun composant défectueux.
   En déduire la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux.

2. Le directeur de l'entreprise souhaite que la probabilité de n'avoir aucun composant défectueux dans un lot de n composants soit supérieure à 0,85. Il propose de former des lots de 11 composants au maximum. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

PARTIE C

Les coûts de fabrication des composants de cette entreprise sont de 15 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n°1, 12 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n°2 et 9 euros s'ils proviennent de la chaîne de montage n°3.

Calculer le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise.

EXERCICE 2 (7 points) [Fonctions, fonction logarithme]

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f, définie sur $]0;+\infty[$, par :
$f(x)=3x-x\ln(x)-2\ln(x)$.

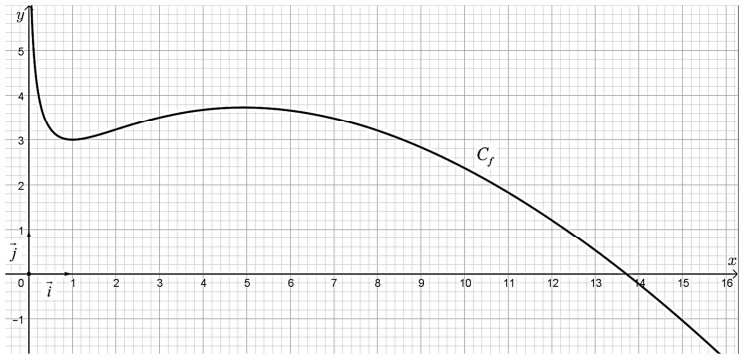
PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire *g*

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2(x-1)-x\ln(x)$. On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$.

1. Calculer $g(1)$ et $g(\mathrm{e})$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ en justifiant votre démarche.
3. Montrer que, pour tout $x>0$, $g'(x)=1-\ln(x)$. En déduire le tableau des variations de g sur $]0;+\infty[$.
4. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0;+\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[\mathrm{e};+\infty[$. On donnera un encadrement de α à 0,01 près.
5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0;+\infty[$.

PARTIE B : Étude de la fonction *f*

On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0;+\infty[$, par
$f(x)=3x-x\ln(x)-2\ln(x)$. On note f' la fonction dérivée de f.
La représentation graphique C_f de cette fonction f est donnée dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ci-dessous. On admet que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.

2. **a.** Justifier que pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.

b. En déduire le tableau des variations de f sur $]0;+\infty[$.

3. On admet que, pour tout $x>0$, la dérivée seconde de f, notée f'', est définie par $f''(x)=\dfrac{2-x}{x^2}$. Étudier la convexité de f et préciser les coordonnées du point d'inflexion de C_f.

EXERCICE 3 (7 points) [Suites]

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.
Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.
Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.
On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020+n$.
On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0=2000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence :

$$u_{n+1}=0,9u_n+100.$$

2. Calculer u_1, puis u_2.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $1000<u_{n+1}\leq u_n$.

4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-1000$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,9$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=1000\left(1+0,9^n\right)$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n). En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S>1000$).

a. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n\leq 1020$.
Justifier la réponse par un calcul.

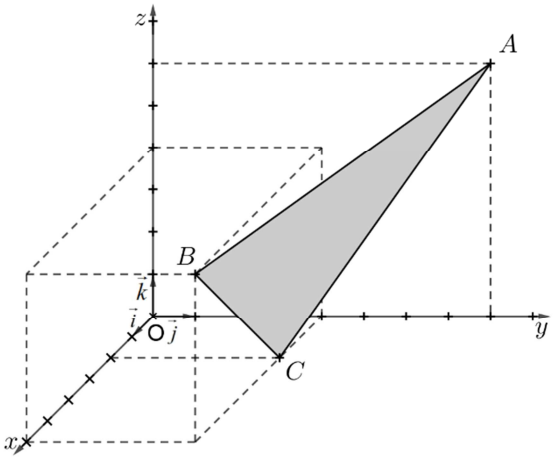
b. Dans le programme Python ci-contre, la variable n désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable u désigne l'effectif de la population.
Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S.

```
def population(S):
    n=0
    u=2000

    while ..........:
        u=...
        n=...
    return ...
```

EXERCICE 4 (7 points) [Géométrie dans l'espace]

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(0;8;6)$, $B(6;4;4)$ et $C(2;4;0)$.



1. **a.** Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1;2;-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soient D et E les points de coordonnées respectives $(0;0;6)$ et $(6;6;0)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DE).

b. Montrer que le milieu I du segment $[BC]$ appartient à la droite (DE).

3. On considère le triangle ABC.

a. Déterminer la nature du triangle ABC.

b. Calculer l'aire du triangle ABC en unité d'aire.

c. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

d. En déduire une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie à 0,1 degré.

4. On considère le point H de coordonnées $\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

Montrer que H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

En déduire la distance du point O au plan (ABC).

31 Nouvelle-Calédonie - Jour 1 (22-MATJ1NC1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**.

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Fonctions, Fonction logarithme ;
Convexité.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 6x + 4\ln(x)\,.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
En déduire le tableau de variations de f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[4;5]$.

4. On admet que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a :

$$f''(x) = \frac{2x^2-4}{x^2}\ .$$

a. Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$. On précisera les valeurs exactes des coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

b. On note A le point de coordonnées $\left(\sqrt{2}\,;f\left(\sqrt{2}\right)\right)$.
Soit t un réel strictement positif tel que $t \neq \sqrt{2}$.
Soit M le point de coordonnées $\left(t\,;f(t)\right)$.

En utilisant la question **4.a**, indiquer, selon la valeur de t, les positions relatives du segment $[\mathrm{AM}]$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.

EXERCICE 2 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Suites ;
Fonctions, Fonction exponentielle.

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = x^3 e^x$.
On admet que la fonction f est dérivable sur **R** et on note f' sa fonction dérivée.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) \ .$$

a. Calculer u_1 puis u_2.
On donnera les valeurs exactes puis les valeurs approchées à 10^{-3}.

b. On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range(n)` » signifie que `i` varie de 0 *à* `n-1`.

```
def fonc(n):
    u=-1
    for i in range(n):
        u=u**3*exp(u)
    return u
```

Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc(2)` arrondie à 10^{-3}.

2. a. Démontrer que, pour tout x réel, on a $f'(x) = x^2 e^x (x+3)$.

b. Justifier que le tableau de variations de f sur **R** est celui représenté ci-dessous :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f	0	↘	$-27e^{-3}$	↗	$+\infty$

c. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0 \ .$$

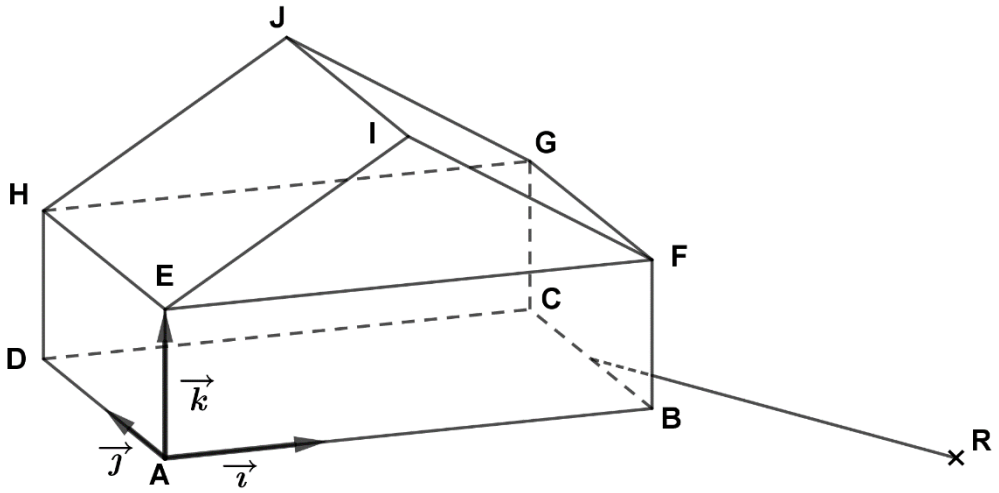
d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

e. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
On rappelle que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
Déterminer ℓ . (Pour cela, on admettra que l'équation $x^2 e^x - 1 = 0$ possède une seule solution dans **R** et que celle-ci est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$.)

EXERCICE 3 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Géométrie dans l'espace.

Une maison est constituée d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'un prisme EFIHGJ dont une base est le triangle EIF isocèle en I.
Cette maison est représentée ci-dessous.



On a AB=3 , AD=2 , AE=1.
On définit les vecteurs $\vec{\imath} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$.

On munit ainsi l'espace du repère orthonormé $(A ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. Donner les coordonnées du point G.

2. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2 ; 0 ; -3)$ est vecteur normal au plan (EHI).
Déterminer une équation cartésienne du plan (EHI).

3. Déterminer les coordonnées du point I.

4. Déterminer une mesure au degré près de l'angle $\widehat{EIF}$.

5. Afin de raccorder la maison au réseau électrique, on souhaite creuser une tranchée rectiligne depuis un relais électrique situé en contrebas de la maison.

Le relais est représenté par le point R de coordonnées $(6 ; -3 ; -1)$.

La tranchée est assimilée à un segment d'une droite Δ passant par R et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-3 ; 4 ; 1)$. On souhaite vérifier que la tranchée atteindra la maison au niveau de l'arête [BC].

a. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. On admet qu'une équation du plan (BFG) est $x = 3$.
Soit K le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (BFG).
Déterminer les coordonnées du point K .

c. Le point K appartient-il bien à l'arête [BC] ?

EXERCICE 4 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Probabilités.

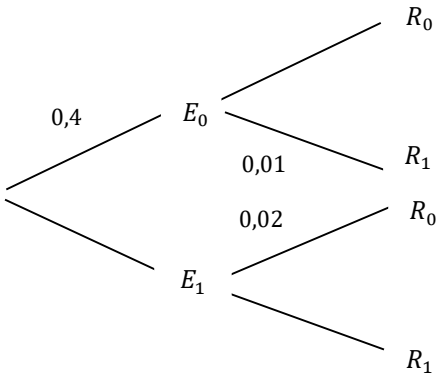
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

On considère un système de communication binaire transmettant des 0 et des 1.
Chaque 0 ou 1 est appelé *bit*.

En raison d'interférences, il peut y avoir des erreurs de transmission :
un 0 peut être reçu comme un 1 et, de même, un 1 peut être reçu comme un 0.

Pour un bit choisi au hasard dans le message, on note les événements :

- E_0 : « le bit envoyé est un 0 » ;
- E_1 : « le bit envoyé est un 1 » ;
- R_0 : « le bit reçu est un 0 » ;
- R_1 : « le bit reçu est un 1 ».



On sait que :
$P(E_0) = 0{,}4$; $P_{E_0}(R_1) = 0{,}01$; $P_{E_1}(R_0) = 0{,}02$.
On rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B est notée $P_B(A)$.

On peut ainsi représenter la situation par l'arbre de probabilités ci-dessus.

1. La probabilité que le bit envoyé soit un 0 et que le bit reçu soit un 0 est égale à :

a. $0{,}99$ **b.** $0{,}396$ **c.** $0{,}01$ **d.** $0{,}4$

2. La probabilité $\mathrm{P}(R_0)$ est égale à :

a. $0{,}99$ **b.** $0{,}02$ **c.** $0{,}408$ **d.** $0{,}931$

3. Une valeur, approchée au millième, de la probabilité $\mathrm{P}_{R_1}(E_0)$ est égale à :

a. $0{,}004$ **b.** $0{,}001$ **c.** $0{,}007$ **d.** $0{,}010$

4. La probabilité de l'événement « il y a une erreur de transmission » est égale à :

a. $0{,}03$ **b.** $0{,}016$ **c.** $0{,}16$ **d.** $0{,}015$

Un message de longueur huit bits est appelé un *octet*.
On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à $0{,}88$.

5. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.
La probabilité, à 10^{-3} près, qu'exactement 7 octets soient transmis sans erreur est égale à :

a. $0{,}915$ **b.** $0{,}109$ **c.** $0{,}976$ **d.** $0{,}085$

6. On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.
La probabilité qu'au moins 1 octet soit transmis sans erreur est égale à :

a. $1 - 0{,}12^{10}$ **b.** $0{,}12^{10}$ **c.** $0{,}88^{10}$ **d.** $1 - 0{,}88^{10}$

7. Soit N un entier naturel. On transmet successivement N octets de façon indépendante. Soit N_0 la plus grande valeur de N pour laquelle la probabilité que les N octets soient tous transmis sans erreur est supérieure ou égale à $0{,}1$.
On peut affirmer que :

a. $N_0 = 17$ **b.** $N_0 = 18$ **c.** $N_0 = 19$ **d.** $N_0 = 20$

32 Nouvelle-Calédonie - Jour 2 (22-MATJ2NC1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le sujet propose 4 exercices.

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 exercices et **ne doit traiter que ces 3 exercices**.

Chaque exercice est noté sur **7 points (le total sera ramené sur 20 points).**

Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront prises en compte.

EXERCICE 1 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Probabilités.

Au basket-ball, il existe deux sortes de tir :

- les *tirs à deux points*.
Ils sont réalisés près du panier et rapportent deux points s'ils sont réussis.

- les *tirs à trois points*.
Ils sont réalisés loin du panier et rapportent trois points s'ils sont réussis.

Stéphanie s'entraîne au tir. On dispose des données suivantes :

- Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points. Parmi eux, 60% sont réussis.
- Trois quarts de ses tirs sont des tirs à trois points. Parmi eux, 35% sont réussis.

1. Stéphanie réalise un tir. On considère les événements suivants :
D : « Il s'agit d'un tir à deux points ».
R : « le tir est réussi ».

a. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b. Calculer la probabilité $P(\overline{D} \cap R)$.

c. Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir est égale à $0{,}4125$.

d. Stéphanie réussit un tir. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points. Arrondir le résultat au centième.

2. Stéphanie réalise à présent une série de 10 tirs à trois points.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis.
On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir à trois points est égale à $0{,}35$.

a. Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate 4 tirs ou plus. Arrondir le résultat au centième.

d. Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs. Arrondir le résultat au centième.

3. Soit n un entier naturel non nul.
Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points. On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité qu'elle réussisse un tir à trois points est égale à $0{,}35$.

Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité que Stéphanie réussisse au moins un tir parmi les n tirs soit supérieure ou égale à $0{,}99$.

EXERCICE 2 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Fonctions, Fonction logarithme.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x - 2\,.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.
On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. a. Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.

b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.

c. Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

d. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T.

2. a. Calculer la limite de la fonction f en 0.

b. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0;+\infty[$. On note α cette solution.

b. Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4{,}3\,;\,4{,}4[$.

c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

5. On considère la fonction `seuil` suivante écrite dans le langage Python :

On rappelle que la fonction `log` *du module* `math` *(que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien* $\ln$.

```
def seuil(pas):
    x=4.3
    while x*log(x)-x-2<0:
        x=x+pas
    return x
```

Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 (7 points)

Principaux domaines abordés :
Géométrie dans l'espace.

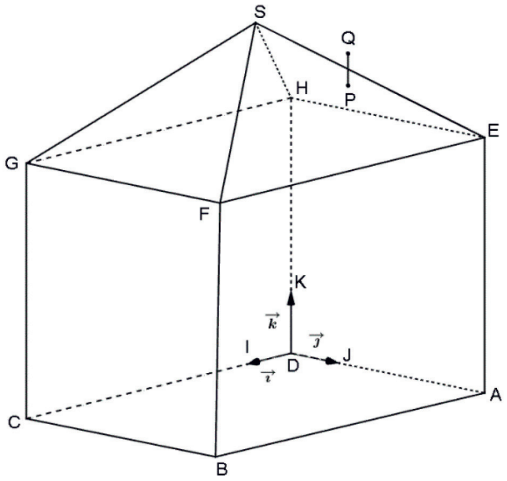
Une maison est modélisée par un parallélépipède rectangle $\mathrm{ABCDEFGH}$ surmonté d'une pyramide EFGHS.

On a $\mathrm{DC} = 6$, $\mathrm{DA} = \mathrm{DH} = 4$.

Soit les points I, J et K tels que $\overrightarrow{\mathrm{DI}} = \frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DJ}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DK}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DH}}$.

On note $\vec{\imath} = \overrightarrow{\mathrm{DI}}$, $\vec{\jmath} = \overrightarrow{\mathrm{DJ}}$, $\vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{DK}}$.

On se place dans le repère orthonormé $(\mathrm{D}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.



On admet que le point S a pour coordonnées $(3\,;2\,;6)$.

1. Donner, sans justifier, les coordonnées des points B, E, F et G.

2. Démontrer que le volume de la pyramide EFGHS représente le septième du volume total de la maison.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EFS).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EFS) est $y + z - 8 = 0$.

4. On installe une antenne sur le toit, représentée par le segment $[\mathrm{PQ}]$.
On dispose des données suivantes :

- le point P appartient au plan (EFS) ;
- le point Q a pour coordonnées $(2\,;3\,;5{,}5)$;
- la droite (PQ) est dirigée par le vecteur $\vec{k}$.

a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (PQ) est :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 5{,}5 + t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

b. En déduire les coordonnées du point P.

c. En déduire la longueur PQ de l'antenne.

Un oiseau vole en suivant une trajectoire modélisée par la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -4 + 6s \\ y = 7 - 4s \\ z = 2 + 4s \end{cases} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

Déterminer la position relative des droites (PQ) et Δ.
L'oiseau va-t-il percuter l'antenne représentée par le segment $[\mathrm{PQ}]$?

EXERCICE 4 (7 points)

Principaux domaines abordés :

Suites ;

Fonctions, Primitives.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} .$$

On peut affirmer que :

a. la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

b. la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

c. la suite (u_n) n'a pas de limite.

d. la suite (u_n) converge.

⁂

Dans les questions **2** et **3**, on considère deux suites (v_n) et (w_n) vérifiant la relation :

$$w_n = \mathrm{e}^{-2v_n} + 2$$

2. Soit a un nombre réel strictement positif. On a $v_0 = \ln(a)$.
On peut affirmer que :

a. $w_0 = \frac{1}{a^2} + 2$

b. $w_0 = \frac{1}{a^2+2}$

c. $w_0 = -2a + 2$

d. $w_0 = \frac{1}{-2a} + 2$

3. On sait que la suite (v_n) est croissante. On peut affirmer que la suite (w_n) est :

a. décroissante et majorée par 3 .

b. décroissante et minorée par 2 .

c. croissante et majorée par 3 .

d. croissante et minorée par 2 .

4. On considère la suite (a_n) ainsi définie :

$a_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $\quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{8}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on a :

a. $a_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2$

b. $a_n = -\frac{2}{3^n} + 4$

c. $a_n = 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

d. $a_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8n}{3}$

5. On considère une suite (b_n) telle que, pour tout entier naturel n, on a :

$$b_{n+1} = b_n + \ln\left(\frac{2}{(b_n)^2+3}\right).$$

On peut affirmer que :

a. la suite (b_n) est croissante.

b. la suite (b_n) est décroissante.

c. la suite (b_n) n'est pas monotone.

d. Le sens de variation de la suite (b_n) dépend de b_0.

6. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} \ .$$

On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.
La courbe $\mathcal{C}_g$ admet :

a. une asymptote verticale et une asymptote horizontale.

b. une asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

c. aucune asymptote verticale et une asymptote horizontale.

d. aucune asymptote verticale et aucune asymptote horizontale.

7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2+1}$.
Soit F une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f. Pour tout réel x, on a :

a. $F(x) = \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{x^2+1}$

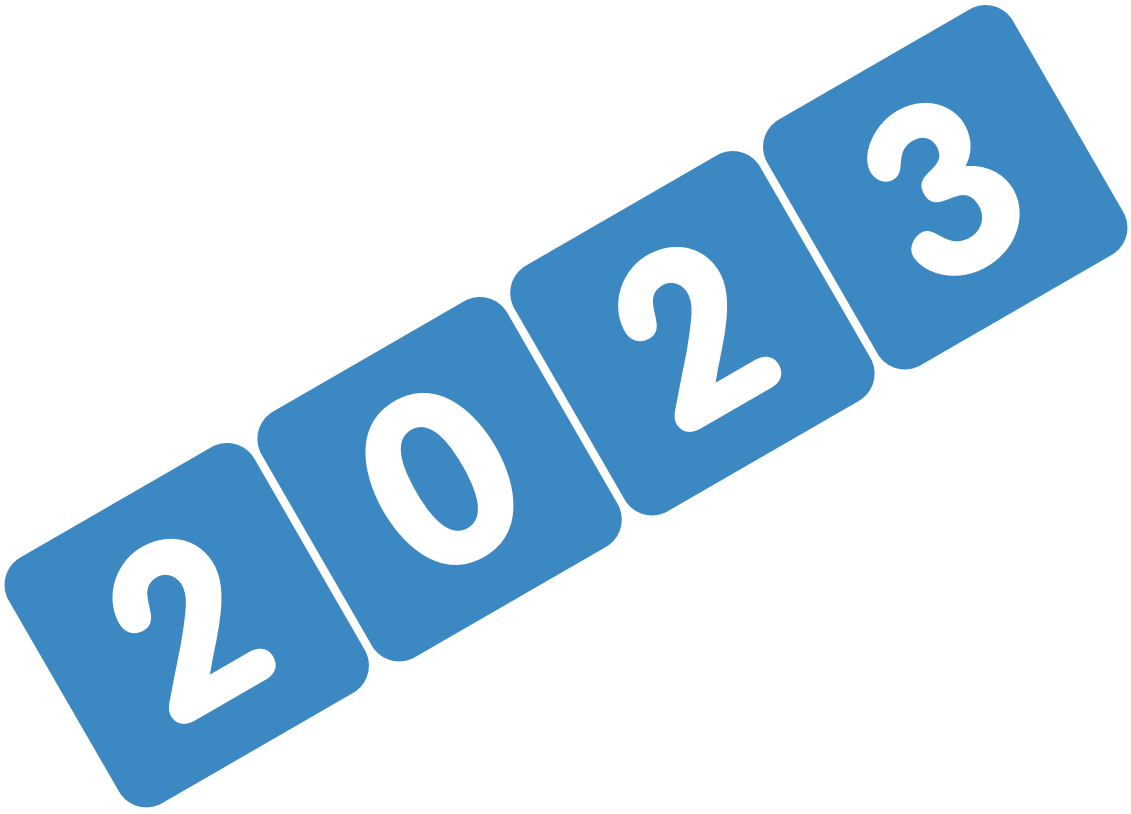
b. $F(x) = (1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2+1}$

c. $F(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$

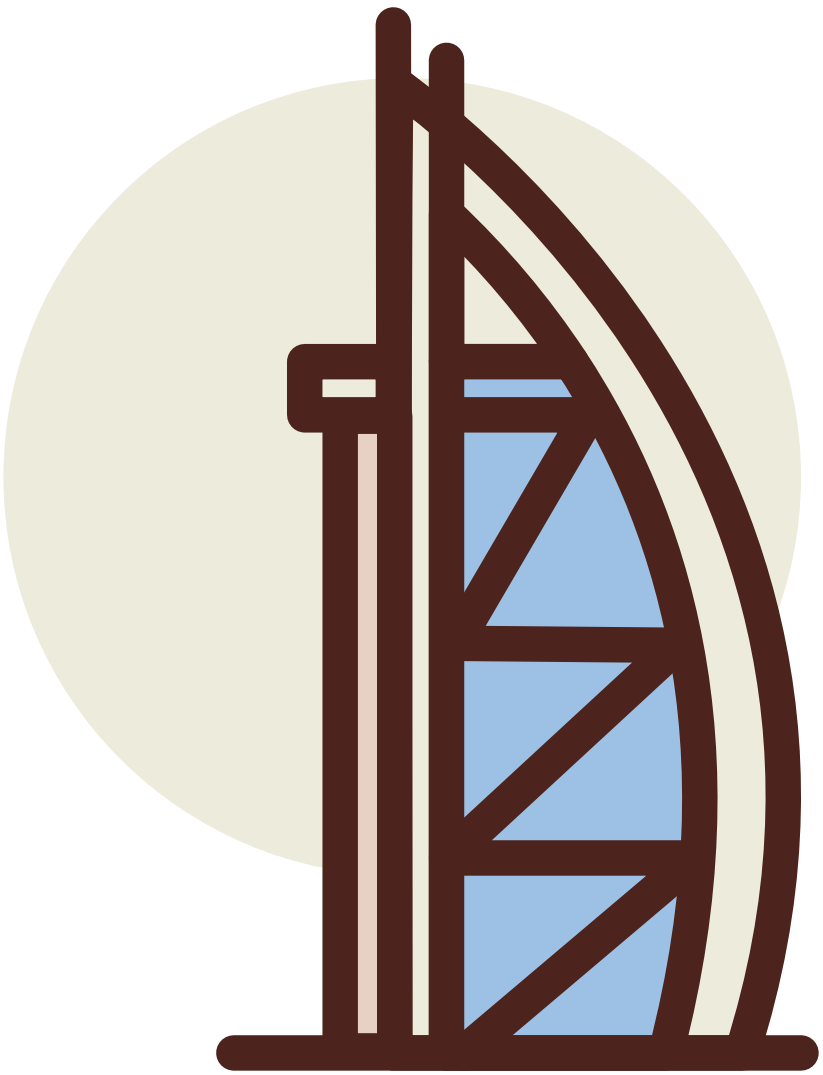
d. $F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2+1}$

Troisième partie

Session 2023



33 Centres Étrangers - Jour 1 (23-MATJ1G11)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1 : QCM (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1 :

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout n entier naturel par $u_n = \frac{1+2^n}{3+5^n}$

Cette suite :

a) diverge vers $+\infty$
b) converge vers $\frac{2}{5}$
c) converge vers 0
d) converge vers $\frac{1}{3}$

Question 2 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$. L'expression de la fonction dérivée de f est :

a) $f'(x) = 2x \ln x$.
b) $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$.
c) $f'(x) = 2$.
d) $f'(x) = x$.

Question 3 :

On considère une fonction h définie et continue sur $\mathbf{R}$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de h	$-\infty$	0	$+\infty$

On note H la primitive de h définie sur $\mathbf{R}$ qui s'annule en 0.
Elle vérifie la propriété :

a) H positive sur $]-\infty ; 0]$.
b) H négative sur $]-\infty ; 1]$.
c) H croissante sur $]-\infty ; 1]$.
d) H croissante sur $\mathbf{R}$.

Question 4 :

Soit deux réels a et b avec $a < b$.
On considère une fonction f définie, continue, strictement croissante sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ et qui s'annule en un réel α.
Parmi les propositions suivantes, la fonction en langage Python qui permet de donner une valeur approchée de α à $0{,}001$ est :

a)

```
def racine(a,b):
    while abs(b-a)>=0.001:
        m =(a+b)/2
        if f(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return m
```

b)

```
def racine(a,b):
    m =(a+b)/2
    while abs(b-a)>=0.001:
        if f(m)<0:
            a=m
        else:
            b=m
    return m
```

c)

```
def racine(a,b):
    m =(a+b)/2
    while abs(b-a)<=0.001:
        if f(m)<0:
            a=m
        else:
            b=m
    return m
```

d)

```
def racine(a,b):
    while abs(b-a)>=0.001:
        m =(a+b)/2
        if f(m)<0:
            a=m
        else:
            b=m
    return m
```

Question 5 :

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher dont 7 sont bleues et les autres vertes. On effectue trois tirages successifs avec remise. La probabilité d'obtenir exactement deux boules vertes est :

a) $\left(\frac{7}{10}\right)^2 \times \frac{3}{10}$

b) $\left(\frac{3}{10}\right)^2$

c) $\binom{10}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$

d) $\binom{3}{2}\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{10}\right)^2$

Exercice 2 (6 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

Partie A

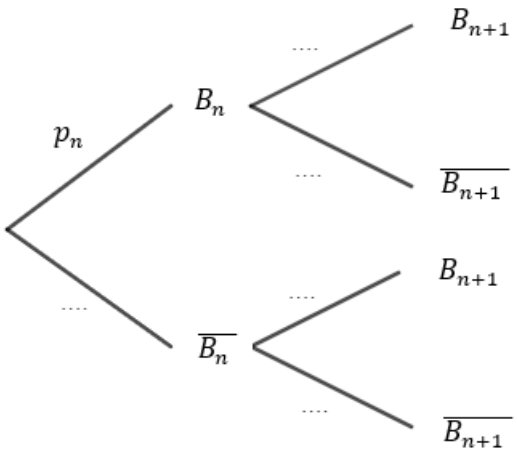
On estime que :

- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0{,}9$;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0{,}4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel. On note B_n l'événement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0{,}85$. *On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré*.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}4$.

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0{,}8$.

b. À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?

5.

a. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0{,}8$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.

c. En déduire la limite de la suite (p_n).

Partie B

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

- l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres ;
- la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à $0{,}8$.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état. Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que les 15 trottinettes soient en bon état.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.
4. On admet que $E(X) = 12$. Interpréter le résultat.

Exercice 3 (6 points)

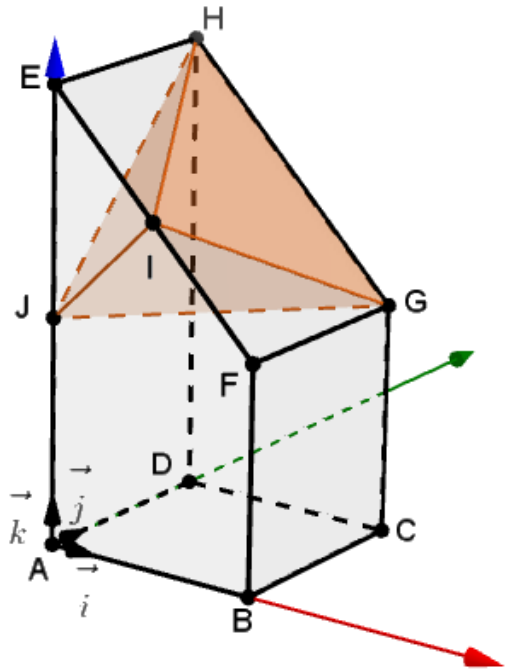
On considère le prisme droit ABFEDCGH, de base ABFE, trapèze rectangle en A.
On associe à ce prisme le repère orthonormé $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ tel que :

$\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$; $\vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$; $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.

De plus on a $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

On note I le milieu du segment [EF].

On note J le milieu du segment [AE].



1. Donner les coordonnées des points I et J.
2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$.
   a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (IGJ).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (IGJ).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, perpendiculaire au plan (IGJ) et passant par H.
4. On note L le projeté orthogonal du point H sur le plan (IGJ).
   Montrer que les coordonnées de L sont $\left(\frac{8}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\ ;\frac{16}{3}\right)$.
5. Calculer la distance du point H au plan (IGJ).
6. Montrer que le triangle IGJ est rectangle en I.
7. En déduire le volume du tétraèdre IGJH.

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times (aire\ de\ la\ base) \times hauteur$$

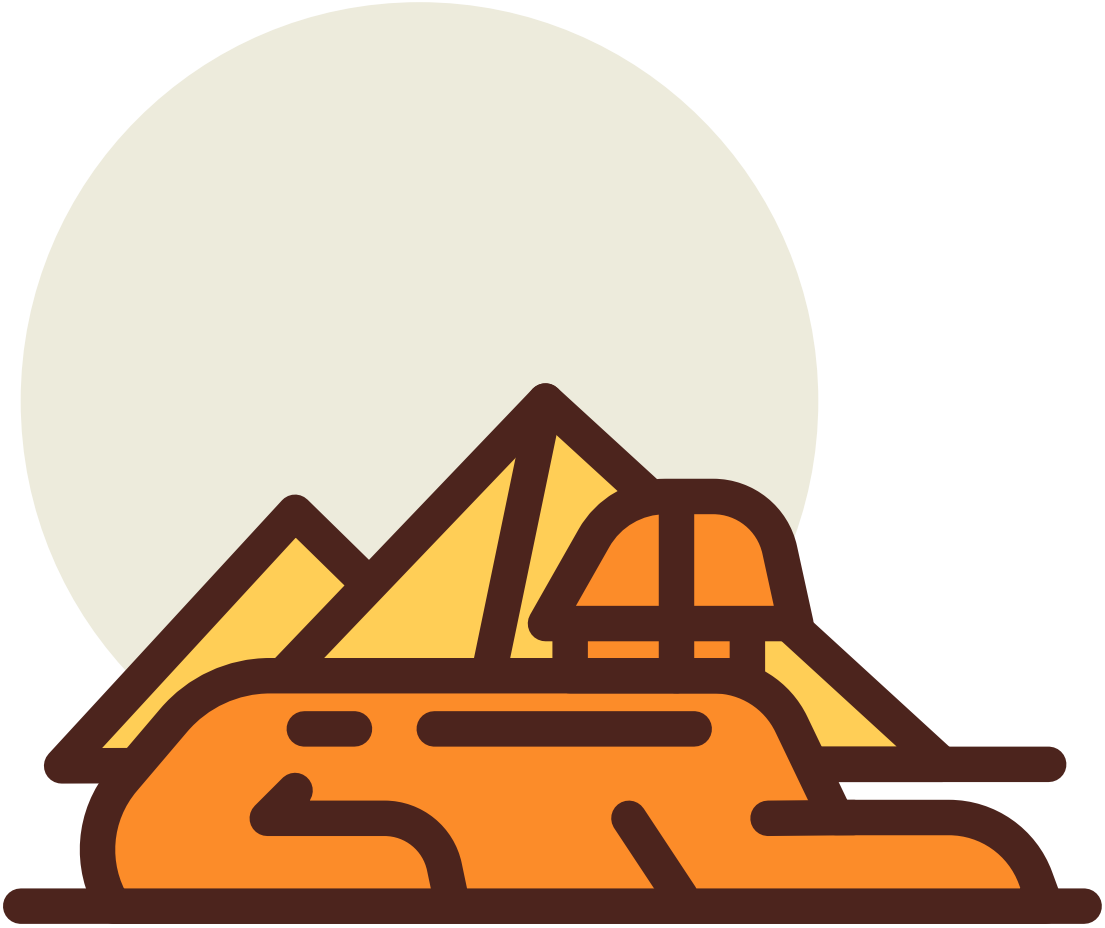
Exercice 4 (3 points)

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = \mathrm{e}^3 - \mathrm{e}^{-0.5t^2+t+2}$ où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.

À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous. Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

- **Affirmation 1** : « La population augmente en permanence ».
- **Affirmation 2** : « À très long terme, la population dépassera $21\,000$ bactéries ».
- **Affirmation 3** : « La population de bactéries aura un effectif de $10\,000$ à deux reprises au cours du temps ».

34 Centres Étrangers - Jour 2 (23-MATJ2G11)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1 : QCM (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = xe^x$. Une primitive F sur $\mathbf{R}$ de la fonction f est définie par :

A. $F(x) = \frac{x^2}{2}e^x$

B. $F(x) = (x-1)e^x$

C. $F(x) = (x+1)e^x$

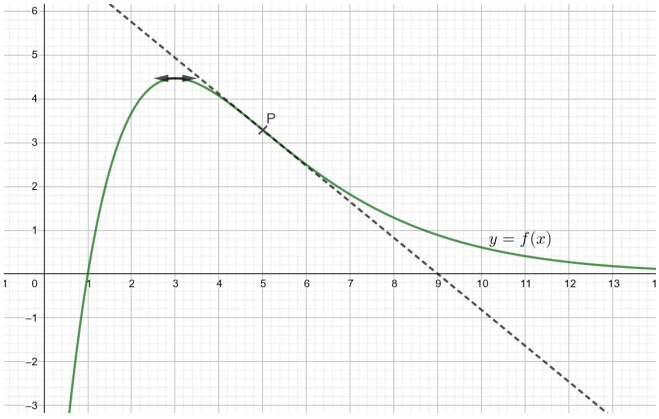
D. $F(x) = \frac{1}{2}xe^{x^2}$

Question 2 :

La courbe *C* ci-dessous représente une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

On sait que :

- le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse 3 ;
- le point P d'abscisse 5 est l'unique point d'inflexion de la courbe *C*.



On a :

A. pour tout $x \in]0;5[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe ;

B. pour tout $x \in]5;+\infty[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe ;

C. pour tout $x \in]0;5[$, $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe ;

D. pour tout $x \in]5;+\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

Question 3 :

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(t)=\frac{a}{b+e^{-t}}$ où a et b sont deux nombres réels.

On sait que $g(0)=2$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=3$. Les valeurs de a et b sont :

A. $a=2$ et $b=3$

B. $a=4$ et $b=\frac{4}{3}$

C. $a=4$ et $b=1$

D. $a=6$ et $b=2$

Question 4 :

Alice dispose de deux urnes A et B contenant chacune quatre boules indiscernables au toucher. L'urne A contient deux boules vertes et deux boules rouges. L'urne B contient trois boules vertes et une boule rouge.

Alice choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Elle obtient une boule verte. La probabilité qu'elle ait choisi l'urne B est :

A. $\frac{3}{8}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{5}{8}$

Question 5 :

On pose $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{100}$.

Parmi les scripts Python ci-dessous, celui qui permet de calculer la somme S est :

a.

```
def somme_a():
  S=0
  for k in range(100):
    S=1/(k+1)
  return S
```

b.

```
def somme_b():
  S=0
  for k in range(100):
    S=S+1/(k+1)
  return S
```

c.

```
def somme_c():
  k=0
  while S <100:
    S=S+1/(k+1)
  return S
```

d.

```
def somme_d():
  k=0
  while k <100:
    S=S+1/(k+1)
  return S
```

Exercice 2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]-1{,}5\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(2x+3)-1$.

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0=0 \text{ et } u_{n+1}=f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]-1{,}5\,;+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-1{,}5$.

On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction g sur $]-1{,}5\,;+\infty[$.

3. **a.** Démontrer que, dans l'intervalle $]-0{,}5\,;+\infty[$, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α.
b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $]-1{,}5\,;+\infty[$.

1. Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1;\alpha]$ alors $f(x) \in [-1;\alpha]$.

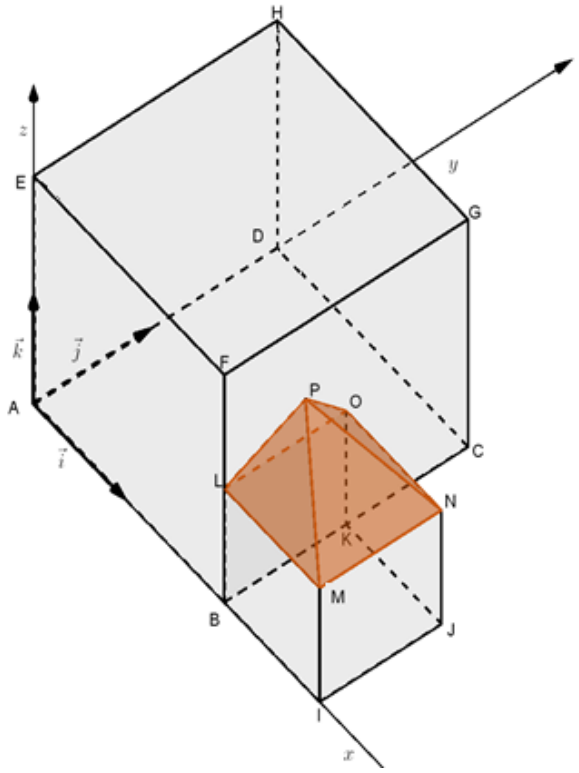
2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 3 (6 points)

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural.
Il s'agit d'une maison de forme cubique $(ABCDEFGH)$ accolée à un garage de forme cubique $(BIJKLMNO)$ où L est le milieu du segment $[BF]$ et K est le milieu du segment $[BC]$.
Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale $(LMNOP)$ de base carrée $LMNO$ et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On munit l'espace du repère orthonormé $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ avec $\vec{\imath}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

1. **a**. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points H, M et N.

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM).

2. L'architecte place le point P à l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF).
Montrer que les coordonnées de P sont $\left(2;\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$.

3. **a.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PN}$

b. Calculer la distance PM .

On admet que la distance PN est égale à $\frac{\sqrt{11}}{3}$.

c. Pour satisfaire à des contraintes techniques, le toit ne peut être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas $55°$. Le toit pourra-t-il être construit ?

4. Justifier que les droites (HM) et (EN) sont sécantes. Quel est leur point d'intersection ?

Exercice 4 (3 points)

Une société de production s'interroge sur l'opportunité de programmer un jeu télévisé. Ce jeu réunit quatre candidats et se déroule en deux phases.

La première phase est une phase de qualification. Cette phase ne dépend que du hasard. Pour chaque candidat, la probabilité de se qualifier est $0{,}6$.

La deuxième phase est une compétition entre les candidats qualifiés. Elle n'a lieu que si deux candidats au moins sont qualifiés. Sa durée dépend du nombre de candidats qualifiés comme l'indique le tableau ci-dessous (lorsqu'il n'y a pas de deuxième phase, on considère que sa durée est nulle).

Nombre de candidats qualifiés pour la deuxième phase	0	1	2	3	4
Durée de la deuxième phase en minutes	0	0	5	9	11

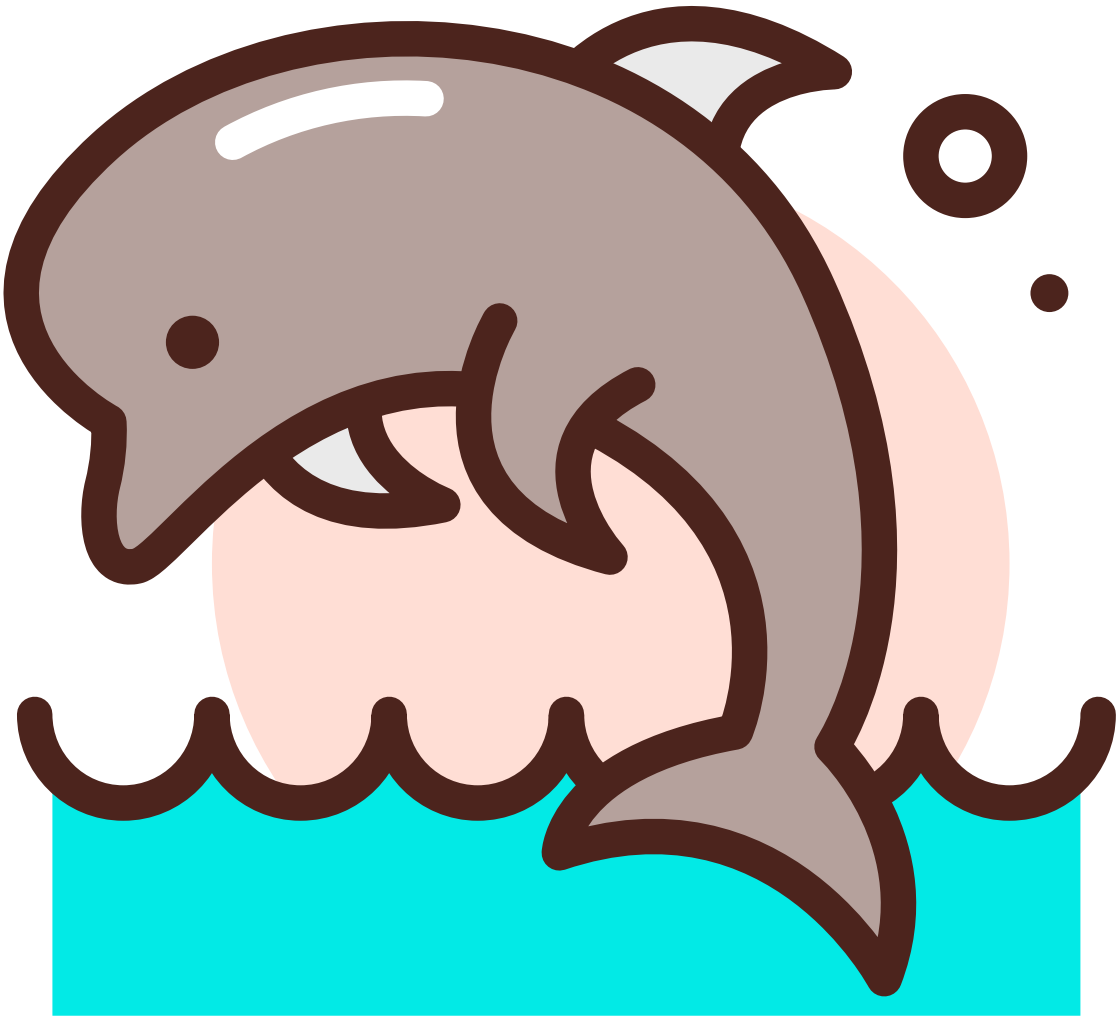
Pour que la société décide de retenir ce jeu, il faut que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

Condition n°1 : La deuxième phase doit avoir lieu dans au moins 80% des cas.

Condition n°2 : La durée moyenne de la deuxième phase ne doit pas excéder 6 minutes.

Le jeu peut-il être retenu ?

35 Polynésie - Jour 1 (23-MATJ1PO1)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1. (4 points) **Thème : probabilités**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les utilisateurs de vélo d'une ville sont classés en deux catégories disjointes :

- ceux qui utilisent le vélo dans leurs déplacements professionnels ;
- ceux qui utilisent le vélo uniquement pour leurs loisirs.

Un sondage donne les résultats suivants :

- 21 % des utilisateurs ont moins de 35 ans. Parmi eux, 68 % utilisent leur vélo uniquement pour leurs loisirs alors que les autres l'utilisent dans leurs déplacements professionnels ;
- parmi les 35 ans ou plus, seuls 20 % utilisent leur vélo dans leurs déplacements professionnels, les autres l'utilisent uniquement pour leurs loisirs.

On interroge au hasard un utilisateur de vélo de cette ville.
Dans tout l'exercice on considère les événements suivants :

- J : « la personne interrogée a moins de 35 ans » ;
- T : « la personne interrogée utilise le vélo dans ses déplacements professionnels » ;
- $\overline{J}$ et $\overline{T}$ sont les événements contraires de J et T.

Partie A

1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait moins de 35 ans et utilise son vélo dans ses déplacements professionnels. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Calculer la valeur exacte de la probabilité de T.

3. On considère à présent un habitant qui utilise son vélo dans ses déplacements professionnels. Démontrer que la probabilité qu'il ait moins de 35 ans est 0,30 à 10^{-2} près.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse uniquement aux personnes utilisant leur vélo dans leurs déplacements professionnels. On admet que 30 % d'entre elles ont moins de 35 ans.

On sélectionne au hasard parmi elles un échantillon de 120 personnes auxquelles on va soumettre un questionnaire supplémentaire. On assimile la sélection de cet échantillon à un tirage aléatoire avec remise.

On demande à chaque individu de cet échantillon son âge.

X représente le nombre de personnes de l'échantillon ayant moins de 35 ans.

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
2. Calculer la probabilité qu'au moins 50 utilisateurs de vélo parmi les 120 aient moins de 35 ans.

Exercice 2. (5 points) **Thème : géométrie dans l'espace**

L'espace est muni d'un repère orthonormé$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère :

- d_1 la droite passant par le point $H(2;3;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$;
- d_2 la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2k-3 \\ y = k \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbf{R}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer une représentation paramétrique d'une droite Δ qui soit perpendiculaire aux droites d_1 et d_2.

1. **a.** Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite d_2.

b. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

c. Démontrer que les droites d_1 et d_2 ne sont pas sécantes.

d. Quelle est la position relative des droites d_1 et d_2 ?

2. **a.** Vérifier que le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

b. On considère le plan P passant par le point H et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$.

On admet qu'une équation cartésienne de ce plan est :

$$5x + 4y - z - 22 = 0.$$

Démontrer que l'intersection du plan P et de la droite d_2 est le point $M(3;3;5)$.

3. Soit Δ la droite de vecteur directeur $\vec{w}$ passant par le point M. Une représentation paramétrique de Δ est donc donnée par :

$$\begin{cases} x = -r+3 \\ y = 2r+3 \\ z = 3r+5 \end{cases} \quad \text{où } r \text{ décrit } \mathbf{R}.$$

a. Justifier que les droites Δ et d_1 sont perpendiculaires en un point L dont on déterminera les coordonnées.

b. Expliquer pourquoi la droite Δ est solution du problème posé.

Exercice 3. (5 points) **Thème : fonction exponentielle, algorithmique**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Affirmation :** La fonction f définie sur **R** par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$ est convexe.

2. **Affirmation :** L'équation $(2\mathrm{e}^x - 6)(\mathrm{e}^x + 2) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution dans **R**.

3. **Affirmation :**
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^x - x} = 0.$$

4. Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = (6x + 5)\mathrm{e}^{3x}$ et F la fonction définie sur **R** par : $F(x) = (2x + 1)\mathrm{e}^{3x} + 4$.
Affirmation : F est la primitive de f sur **R** qui prend la valeur 5 quand $x = 0$.

5. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste `L` de nombres en paramètre.
On rappelle que `len(L)` représente la longueur de la liste `L`.

```
def mystere(L) :
    S = 0
    for i in range(len(L)) :
        S = S + L[i]
    return S / len(L)
```

Affirmation : L'exécution de `mystere([1,9,9,5,0,3,6,12,0,5])` renvoie `50.`

Exercice 4. (6 points) **Thèmes : suites, fonctions**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n - 0{,}3.$$

1.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 2 \times 0{,}9^n - 3$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $-3 < u_n \leq -1$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

d. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

2. On se propose d'étudier la fonction g définie sur $]-3\ ;\ -1]$ par :

$$g(x) = \ln(0{,}5\ x + 1{,}5) - x.$$

a. Justifier toutes les informations données par le tableau de variations de la fonction g (limites, variations, image de -1)

x	-3	-2	-1
Variations de g.	$\|\|$ $-\infty$	$g(-2)$	1

b. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ a exactement une solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

3. Dans la suite de l'exercice, on considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbf{N}$, par :

$$v_n = \ln(0{,}5\ u_n + 1{,}5).$$

a. En utilisant la formule donnée à la question **1. a.**, démontrer que (v_n) est arithmétique de raison $\ln(0{,}9)$.

b. Soit n un entier naturel.

Démontrer que $u_n = v_n$ si, et seulement si $g(u_n) = 0$.

c. Démontrer qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbf{N}$ pour lequel $u_k = \alpha$.

d. En déduire qu'il n'existe aucun rang $k \in \mathbf{N}$ pour lequel $v_k = u_k$.

36 Polynésie - Jour 2 (23-MATJ2PO1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1. (5 points) **Thèmes : probabilités, suites**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

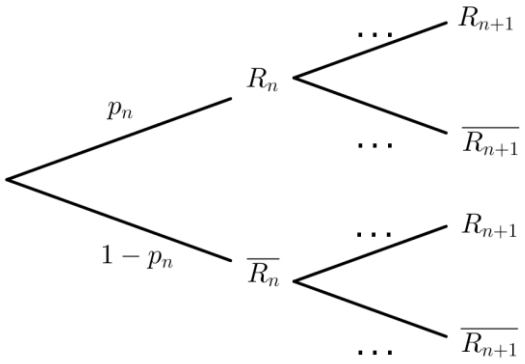
Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente, que :

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90 % des cas le jour suivant ;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note pour tout entier naturel n :

- R_n l'événement : « L'athlète réussit à franchir la haie lors de la n-ième séance »,
- p_n la probabilité de l'événement R_n. On considère que $p_0 = 0{,}6$.

1. Soit n un entier naturel, recopier l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés.



2. Justifier en vous aidant de l'arbre que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 0{,}6\, p_n + 0{,}3.$$

3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - 0{,}75$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $p_n = 0{,}75 - 0{,}15 \times 0{,}6^n$.

c. En déduire que la suite (p_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ.

d. Interpréter la valeur de ℓ dans le cadre de l'exercice.

Partie B

Après de nombreuses séances d'entraînement, l'entraineur estime maintenant que l'athlète franchit chaque haie avec une probabilité de 0,75 et ce indépendamment d'avoir franchi ou non les haies précédentes.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de haies franchies par l'athlète à l'issue d'un 400 mètres haies qui comporte 10 haies.

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

2. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité que l'athlète franchisse les 10 haies.

3. Calculer $P(X \geq 9)$, à 10^{-3} près.

Exercice 2. (5 points) **Thème : Géométrie dans l'espace**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k} \right)$.

On considère :

- le point $A(1\ ;-1\ ;-1)$;
- le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation : $5x + 2y + 4z = 17$;
- le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation : $10x + 14y + 3z = 19$;
- la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -\ t \\ z = 3 - 2\ t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbf{R}.$$

1. Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles.

2. Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

3. **a.** Vérifier que A n'appartient pas à $\mathcal{P}_1$.

b. Justifier que A n'appartient pas à $\mathcal{D}$.

4. Pour tout réel t, on note M le point de $\mathcal{D}$ de coordonnées $(1 + 2t\ ;-t\ ;3 - 2t)$.
On considère alors f la fonction qui à tout réel t associe AM^2, soit $f(t) = AM^2$.

a. Démontrer que pour tout réel t, on a : $f(t) = 9t^2 - 18t + 17$

b. Démontrer que la distance AM est minimale lorsque M a pour coordonnées $(3\ ;-1\ ;1)$.

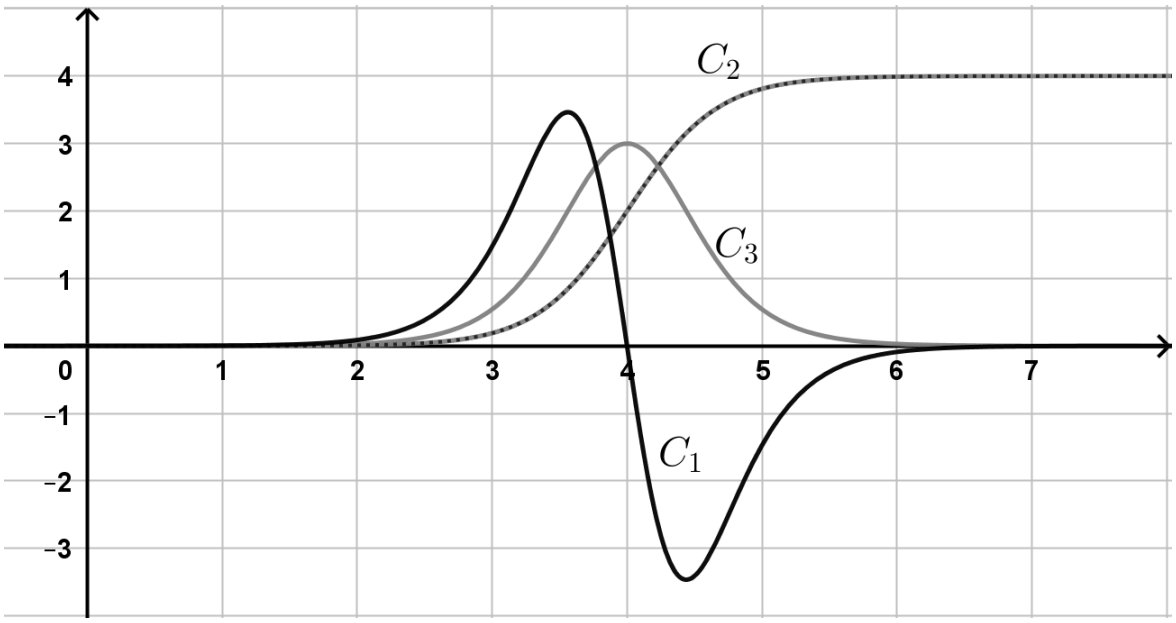
5. On note H le point de coordonnées $(3\ ;-1\ ;1)$. Démontrer que la droite (AH) est perpendiculaire à $\mathcal{D}$.

Exercice 3 (5 points) **Thème : étude de fonctions**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A.

Le plan est ramené à un repère orthogonal. On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur **R,** ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.



1. Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.
2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_2 au point d'abscisse 4.
3. Donner, avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe C_1.

Partie B.

Soit un réel k strictement positif. On considère la fonction g définie sur **R** par :

$$g(x) = \frac{4}{1 + \mathrm{e}^{-k\,x}}$$

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Prouver que $g'(0) = k$.

3. En admettant le résultat ci-dessous obtenu avec un logiciel de calcul formel, prouver que la courbe de g admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.

Calcul formel

1	g(x)=4/(1+ *e* ^(-k x)) → $\mathbf{g(x) = \frac{4}{e^{-kx} + 1}}$
2	Simplifier(g''(x)) → $\mathbf{g''(x) = -4\ e^{kx}\left(e^{kx} - 1\right)\ \frac{k^2}{\left(e^{kx} + 1\right)^3}}$

Exercice 4. (5 points) Thème : suites, fonction logarithme, algorithmique

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Affirmation** : La suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ est bornée.

2. **Affirmation** : Toute suite bornée est convergente.

3. **Affirmation** : Toute suite croissante tend vers $+\infty$.

4. Soit la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$.
   Affirmation : La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3 ; 1]$.

5. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste `L` de nombres en paramètre. On rappelle que `len(L)` renvoie la longueur, c'est-à-dire le nombre d'éléments de la liste `L`.

```
def mystere(L) :
    M = L[0]
    #On initialise M avec le premier élément de la liste L
    for i in range(len(L)) :
        if L[i] > M :
            M = L[i]
    return M
```

   Affirmation : L'exécution de `mystere([2,3,7,0,6,3,2,0,5])` renvoie `7`.

37 Métropole - Jour 1 (23-MATJ1ME1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

Lundi 20 mars 2023

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.
Les questions sont indépendantes.

Un technicien contrôle les machines équipant une grande entreprise. Toutes ces machines sont identiques.

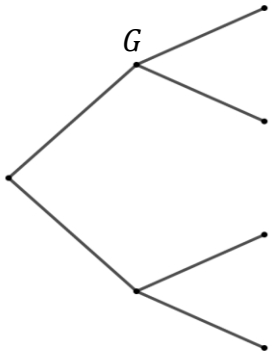
On sait que :

- 20% des machines sont sous garantie ;
- 0,2% des machines sont à la fois défectueuses et sous garantie ;
- 8,2% des machines sont défectueuses.

Le technicien teste une machine au hasard.

On considère les événements suivants :

- G : « la machine est sous garantie » ;
- D : « la machine est défectueuse » ;
- $\overline{G}$ et $\overline{D}$ désignent respectivement les événements contraires de G et D.



Pour répondre aux questions **1** à **3**, on pourra s'aider de l'arbre proposé ci-contre.

1. La probabilité $p_G(D)$ de l'événement D sachant que G est réalisé est égale à :

a. 0,002 **b.** 0,01
c. 0,024 **d.** 0,2

2. La probabilité $p(\overline{G} \cap D)$ est égale à :

a. 0,01 **b.** 0,08
c. 0,1 **d.** 0,21

3. La machine est défectueuse. La probabilité qu'elle soit sous garantie est environ égale, à 10^{-3} près, à :

a. 0,01 **b.** 0,024
c. 0,082 **d.** 0,1

Pour les questions **4** et **5,** on choisit au hasard et de façon indépendante n machines de l'entreprise, où n désigne un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise, et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de n machines le nombre de machines défectueuses dans ce lot.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}082$.

4. Dans cette question, on prend $n = 50$.

La valeur de la probabilité $p(X > 2)$, arrondie au millième, est de :

a. 0,136 **b.** 0,789
c. 0,864 **d.** 0,924

5. On considère un entier n pour lequel la probabilité que toutes les machines d'un lot de taille n fonctionnent correctement est supérieure à $0{,}4$. La plus grande valeur possible pour n est égale à :

a. 5 **b.** 6 **c.** 10 **d.** 11

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 8\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$.
En déduire la limite : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Montrer que, pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2(x^2-4)}{x}$.

4. Étudier les variations de f sur $]0\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.
On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\,;+\infty[$.

5. Démontrer que, sur l'intervalle $]0\,;\,2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).

6. On admet que, sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).
En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

7. Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k\ .$$

En s'aidant du tableau de variations de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Exercice 3 (5 points)

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90% des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \text{ et, pour tout entier naturel } n \geq 1,\ u_{n+1} = 0{,}9\, u_n + 1{,}3.$$

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0{,}9^n .$$

3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

4. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.

Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(8.5)` et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times \mathrm{e}^{-0{,}19\times(n-1)} .$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.

2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8{,}5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

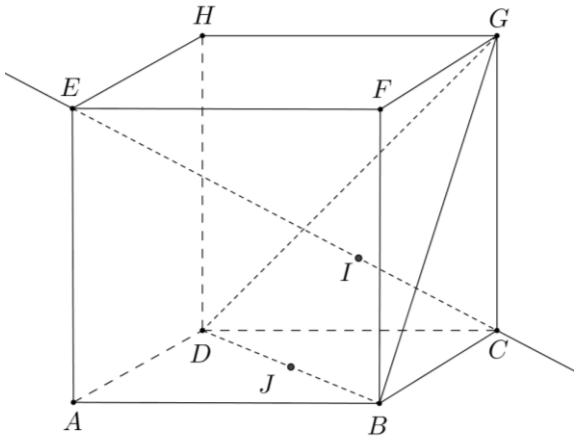
1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ. Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ? Justifier votre réponse.
2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?

Exercice 4 (5 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

On appelle I le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Donner dans ce repère les coordonnées des points E, C, G.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).
3. Démontrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).
4. **a.** Justifier qu'une équation cartésienne du plan (GBD) est : $x + y - z - 1 = 0$.

   b. Montrer que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

   c. En déduire que la distance du point E au plan (GBD) est égale à $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
5. **a.** Démontrer que le triangle BDG est équilatéral.

   b. Calculer l'aire du triangle BDG. On pourra utiliser le point J, milieu du segment $[BD]$.
6. Justifier que le volume du tétraèdre $EGBD$ est égal à $\frac{1}{3}$.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.

38 Métropole - Jour 2 (23-MATJ2ME1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

Mardi 21 mars 2023

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.

Un jeu vidéo possède une vaste communauté de joueurs en ligne. Avant de débuter une partie, le joueur doit choisir entre deux « mondes » : soit le monde A, soit le monde B.

On choisit au hasard un individu dans la communauté des joueurs.
Lorsqu'il joue une partie, on admet que :

- la probabilité que le joueur choisisse le monde A est égale à $\frac{2}{5}$;
- si le joueur choisit le monde A, la probabilité qu'il gagne la partie est de $\frac{7}{10}$;
- la probabilité que le joueur gagne la partie est de $\frac{12}{25}$.

On considère les évènements suivants :

- A : « Le joueur choisit le monde A » ;
- B : « Le joueur choisit le monde B » ;
- G : « Le joueur gagne la partie ».

1. La probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie est égale à :

a. $\frac{7}{10}$ **b.** $\frac{3}{25}$ **c.** $\frac{7}{25}$ **d.** $\frac{24}{125}$

2. La probabilité $P_B(G)$ de l'événement G sachant que B est réalisé est égale à :

a. $\frac{1}{5}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{7}{15}$ **d.** $\frac{5}{12}$

Dans la suite de l'exercice, un joueur effectue 10 parties successives. On assimile cette situation à un tirage aléatoire avec remise. On rappelle que la probabilité de gagner une partie est de $\frac{12}{25}$.

3. La probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne exactement 6 parties est égale à:

a. $0{,}859$ **b.** $0{,}671$ **c.** $0{,}188$ **d.** $0{,}187$

4. On considère un entier naturel n pour lequel la probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne au plus n parties est de $0{,}207$. Alors :

a. $n = 2$ **b.** $n = 3$ **c.** $n = 4$ **d.** $n = 5$

5. La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est égale à :

a. $1 - \left(\frac{12}{25}\right)^{10}$ **b.** $\left(\frac{13}{25}\right)^{10}$ **c.** $\left(\frac{12}{25}\right)^{10}$ **d.** $1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$

Exercice 2 (5 points)

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de $100\,000$ insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturel le nombre d'insectes ne doit pas dépasser $400\,000$.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire

L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de $60\ \%$ chaque mois.
En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois. On a donc $u_0 = 0{,}1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 0{,}1 \times 1{,}6^n$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0{,}4$.

4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle

En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.
Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n), définie par : $v_0 = 0{,}1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1{,}6v_n - 1{,}6v_n^2$, où, pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1{,}6x - 1{,}6x^2$.

a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.

On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

c. Déterminer la valeur de ℓ. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

4. On donne ci-contre la fonction `seuil`, écrite en langage Python.

a. Qu'observe-t-on si on saisit `seuil(0.4)` ?

b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(0.35)`. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
      v=1.6*v-1.6*v*v
      n=n+1
    return n
```

Exercice 3 (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère :

- le plan $\mathcal{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x + y - z + 2 = 0$,
- le plan $\mathcal{P}_2$ passant par le point $B(1\,;1\,;2)$ et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $\mathcal{P}_1$.

b. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.
Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$.

b. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases}x = 0\\y = -2 + t\\z = t\end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

On considère le point $A(1\,;1\,;1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathcal{P}_1$ ni à $\mathcal{P}_2$.
On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question **2.b**, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0\,;-2+t\,;t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

a. Montrer que, pour tout réel t, $AM_t = \sqrt{2t^2 - 8t + 11}$.

b. En déduire que $AH = \sqrt{3}$.

4. On note $\mathcal{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}_1$.

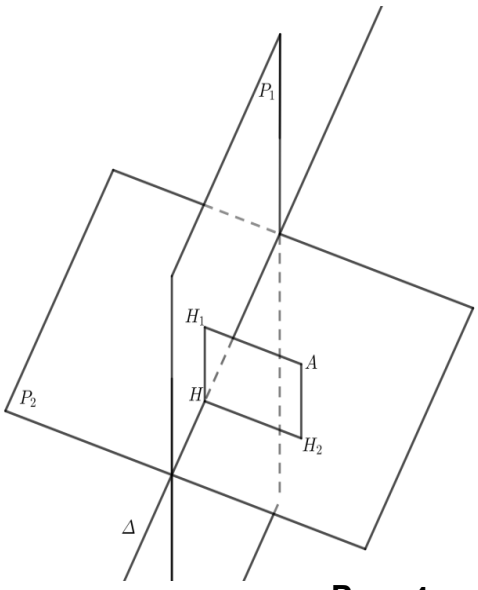
a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.
b. En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}_2$.

On admet que H_2 a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3}\,;\,\frac{2}{3}\,;\,\frac{4}{3}\right)$ et que H a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,2)$.

Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2, H.

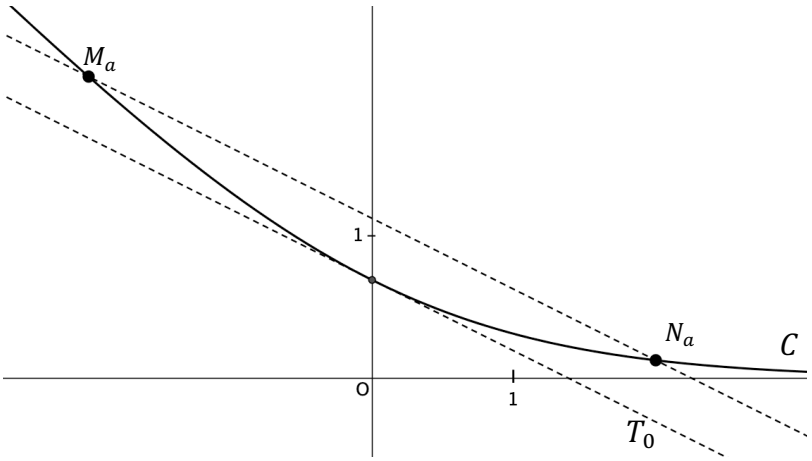
Montrer que AH_1HH_2 est un rectangle.



Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x})$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
La courbe C est tracée ci-dessous.



1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

c. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{-1}{1+\mathrm{e}^{x}}$.

d. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On note T_0 la tangente à la courbe C en son point d'abscisse 0.

a. Déterminer une équation de la tangente T_0.

b. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

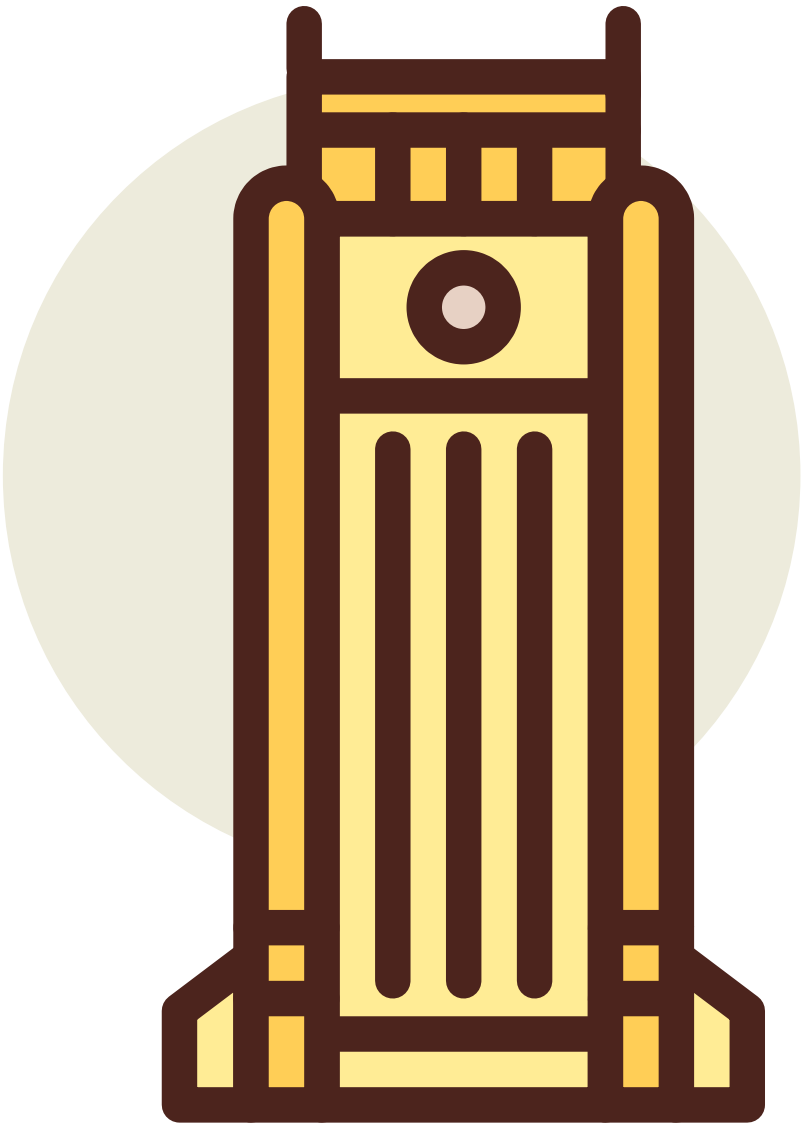
c. En déduire que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe C d'abscisses respectives $-a$ et a. On a donc : $M_a\big(-a\,;f(-a)\big)$ et $N_a\big(a\,;f(a)\big)$.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) - f(-x) = -x$.

b. En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.

39 Liban - Jour 1 (23-MATJ1LI1)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par

$$g(x) = \ln(x^2) + x - 2$$

1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
2. On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
3. a. Démontrer qu'il existe un unique réel strictement positif α tel que $g(\alpha) = 0$.
   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. En déduire le tableau de signe de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x-2)}{x}\ln(x)$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   b. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
4. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie C

Étudier la position relative de la courbe C_f et de la courbe représentative de la fonction $\ln$ sur l'intervalle $]0;\ +\infty[$.

Exercice 2 (5 points)

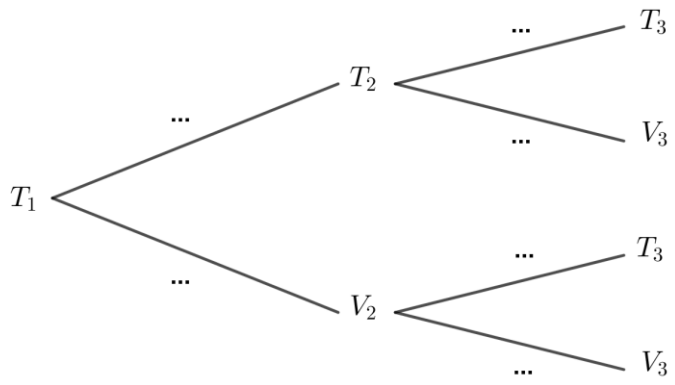
Dans un souci de préservation de l'environnement, Monsieur Durand décide de se rendre chaque matin au travail en utilisant son vélo ou les transports en commun.
S'il choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à 0,8.
S'il utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à 0,4.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- T_n l'événement « Monsieur Durand utilise les transports en commun le n-ième jour »
- V_n l'événement « Monsieur Durand utilise son vélo le n-ième jour »
- On note p_n la probabilité de l'événement T_n.

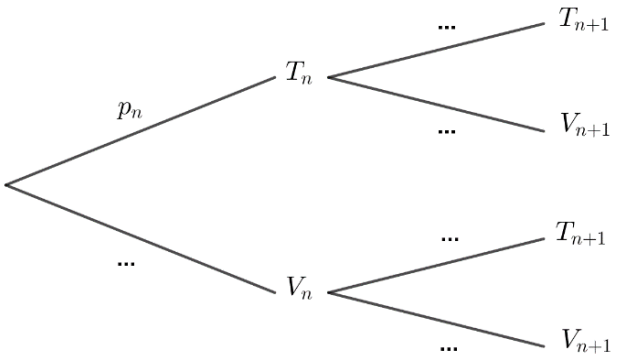
Le premier matin, il décide d'utiliser les transports en commun. Ainsi, la probabilité de l'événement T_1 est $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les 2e et 3e jours.



2. Calculer p_3.
3. Le 3e jour, M. Durand utilise son vélo.
   Calculer la probabilité qu'il ait pris les transports en commun la veille.

4. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième jours.



5. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}6$.
6. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a $p_n = 0{,}75 + 0{,}25 \times 0{,}2^{n-1}$.
7. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les cinq questions sont indépendantes.

Dans tout l'exercice, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

1. Une primitive de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^x$, est la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$, par :

   a) $F(x) = \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x$
   b) $F(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$
   c) $F(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$
   d) $F(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x^2}$

2. On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2x+4}\right)$.

   La fonction g est définie sur :

   a) $\mathbb{R}$
   b) $]-2;+\infty[$
   c) $]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$
   d) $]-2;1[$

3. La fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+1)\mathrm{e}^x$ est :

   a) concave sur $\mathbb{R}$
   b) convexe sur $\mathbb{R}$
   c) convexe sur $]-\infty;-3]$ et concave sur $[-3;+\infty[$
   d) concave sur $]-\infty;-3]$ et convexe sur $[-3;+\infty[$

4. Une suite (u_n) est minorée par 3 et converge vers un réel ℓ.

   On peut affirmer que :

   a) $\ell = 3$
   b) $\ell \geq 3$
   c) La suite (u_n) est décroissante.
   d) La suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

5. La suite (w_n) est définie par $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif, $w_{n+1} = \frac{1}{n}w_n$.

   a) La suite (w_n) est géométrique
   b) La suite (w_n) n'admet pas de limite
   c) $w_5 = \frac{1}{15}$
   d) La suite (w_n) converge vers 0

Exercice 4 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points $A(-1;-3;2)$, $B(3;-2;6)$ et $C(1;2;-4)$.

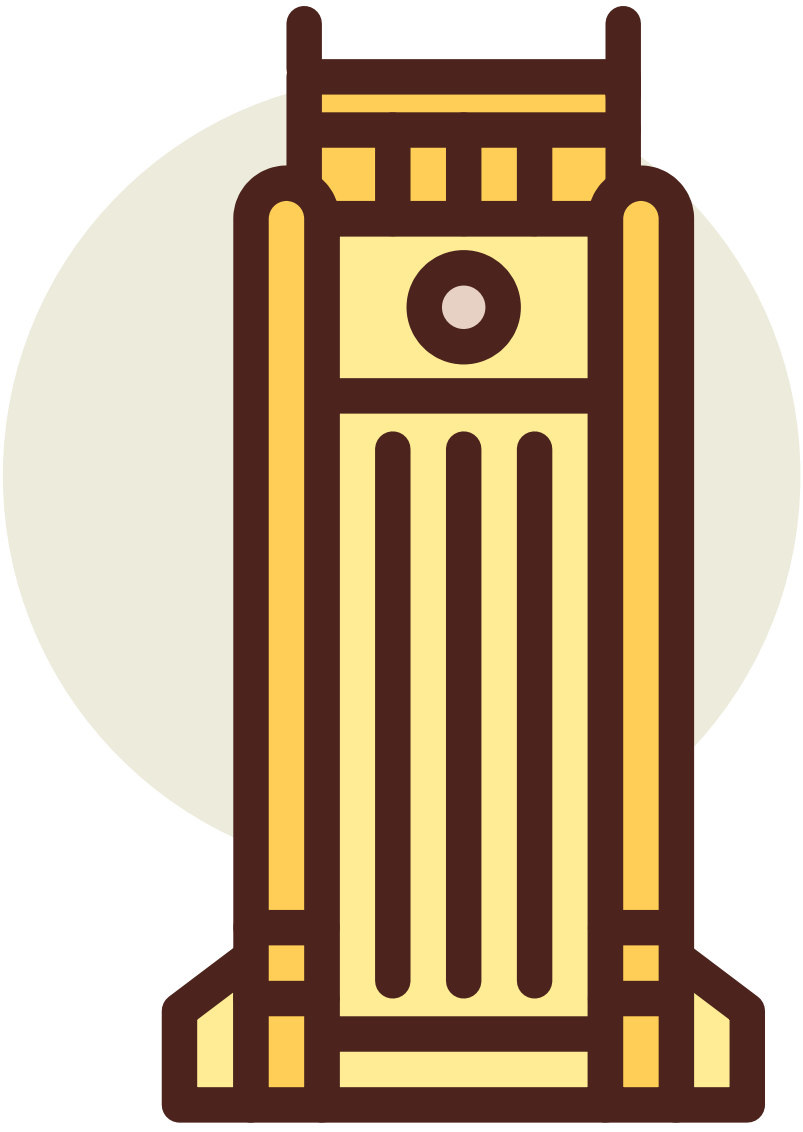
1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathcal{P}$.
2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

   b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $13x-16y-9z-17=0$.

On note $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $F(15;-16;-8)$ et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.
4. On appelle E le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$.
   Démontrer que le point E a pour coordonnées $(2;0;1)$.
5. Déterminer la valeur exacte de la distance du point F au plan $\mathcal{P}$.
6. Déterminer les coordonnées du ou des point(s) de la droite $\mathcal{D}$ dont la distance au plan $\mathcal{P}$ est égale à la moitié de la distance du point F au plan $\mathcal{P}$.

40 Liban - Jour 2 (23-MATJ2LI1)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

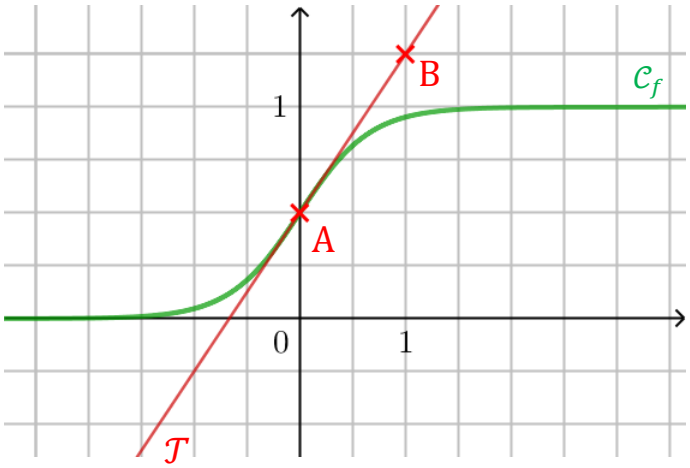
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-3x}}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On nomme A le point de coordonnées $\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\,;\,\frac{5}{4}\right)$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$, et $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Partie A : lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B : étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
   b. Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f.
4. Déterminer la valeur exacte de la solution α de l'équation $f(x) = 0{,}99$.

Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.
On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}(\mathrm{e}^{-3x} - 1)}{(1 + \mathrm{e}^{-3x})^3}$$

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
   b. Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
4. En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$. Justifier la réponse.

Exercice 2 (5 points)

Partie A

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x)$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
3. **a.** En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
   b. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
4. **a.** Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, on a :

$$f(x) = \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\right).$$

   b. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Donner la valeur arrondie au millième de u_1.
2. En utilisant la question **3.a.** de la **partie A**, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq 0$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$.
On considère les points $\mathrm{A}(3\,;\,0\,;\,1)$, $\mathrm{B}(2\,;\,1\,;\,2)$ et $\mathrm{C}(-2\,;\,-5\,;\,1)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne :
$$-x+y-2z+5=0$$
4. On considère le point $\mathrm{S}(1\,;\,-2\,;\,4)$.
Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ), passant par S et orthogonale au plan (ABC).
5. On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
Montrer que les coordonnées de H sont $(0\,;-1\,;2)$.
6. Calculer la valeur exacte de la distance SH.
7. On considère le cercle $\mathcal{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathcal{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathcal{C}$.
Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathcal{D}$.
8. En déduire la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque $\mathcal{D}$.

Exercice 4 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les cinq questions sont indépendantes.

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

On choisit au hasard n pièces produites par la chaîne de fabrication. Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.

Dans les trois questions suivantes, on prend $n=50$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, de tirer au moins une pièce défectueuse ?
a. 1
b. 0,870
c. 0,600
d. 0,599

2. La probabilité $p(3 < X \leq 7)$ est égale à :
a. $p(X \leq 7) - p(X > 3)$
b. $p(X \leq 7) - p(X \leq 3)$
c. $p(X < 7) - p(X > 3)$
d. $p(X < 7) - p(X \geq 3)$

3. Quel est le plus petit entier naturel k tel que la probabilité de tirer au plus k pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 % ?
a. 2
b. 3
c. 4
d. 5

Dans les questions suivantes, n ne vaut plus nécessairement 50.

4. Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses ?
a. $0{,}04^n$
b. $0{,}96^n$
c. $1 - 0{,}04^n$
d. $1 - 0{,}96^n$

5. On considère la fonction Python ci-dessous. Que renvoie-t-elle ?

```
def seuil(x):
    n = 1
    while 1-0.96**n < x :
        n = n + 1
    return n
```

a. Le plus petit nombre `n` tel que la probabilité de tirer au moins une pièce défectueuse soit supérieure ou égale à `x`.
b. Le plus petit nombre `n` tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à `x`.
c. Le plus grand nombre `n` tel que la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses soit supérieure ou égale à `x`.
d. Le plus grand nombre `n` tel que la probabilité de ne tirer aucune pièce défectueuse soit supérieure ou égale à `x`.

41 Asie - Jour 1 (23-MATJ1JA1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice en mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1 à 9.
L'annexe en page 9 / 9 est à rendre avec la copie.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Tous les exercices doivent être traités.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidates et les candidats sont invités à faire figurer sur leurs copies toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse.

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 60$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a l'inégalité $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$.
3. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Justifier.
4. On donne une fonction écrite en langage Python :

```
def mystere(seuil):
    n=0
    u=400
    while u <= seuil :
        n = n+1
        u = 0.9*u+60
    return n
```

Quelle valeur obtient-on en tapant dans la console de Python : `mystere(500)` ?

Partie B

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres. Chaque année il vend 10% des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres. Le verger compte 400 arbres en 2023.

L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir.

Va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger ? Expliquer votre réponse.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère le cube ABCDEFGH qui est représenté en ANNEXE.

Dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$, on considère les points M, N et P de coordonnées :

$$M\left(1 ; 1 ; \frac{3}{4}\right), \ N\left(0 ; \frac{1}{2} ; 1\right), P\left(1 ; 0 ; -\frac{5}{4}\right)$$

Dans cet exercice, on se propose de calculer le volume du tétraèdre FMNP.

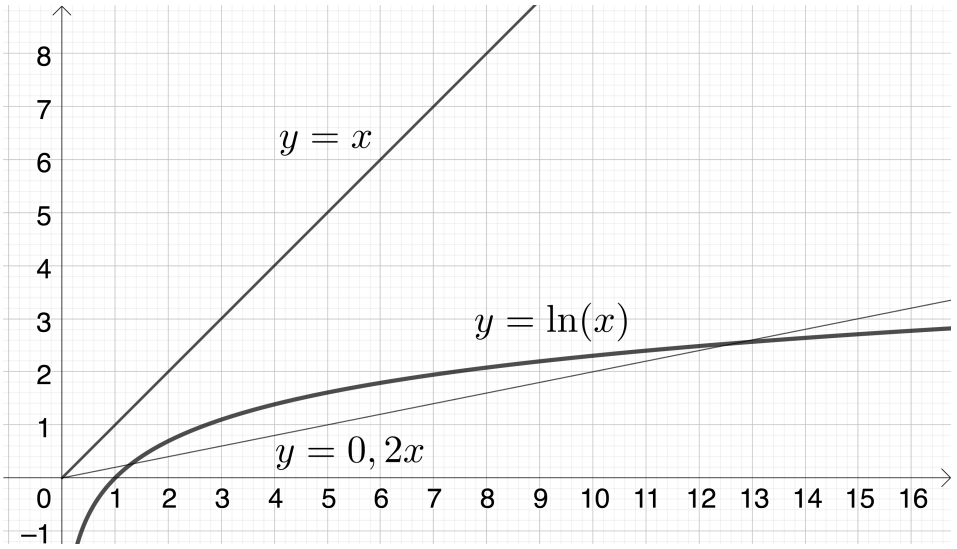
1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
2. Placer les points M, N et P sur la figure donnée en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.
3. Justifier que les points M, N et P ne sont pas alignés.
   Dès lors les trois points définissent le plan (MNP).
4. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$, puis en déduire la nature du triangle MNP.
   (b) Calculer l'aire du triangle MNP.
5. (a) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}(5 ; -8 ; 4)$ est un vecteur normal au plan (MNP).
   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (MNP) est $5x - 8y + 4z = 0$.
6. On rappelle que le point F a pour coordonnées $F(1 ; 0 ; 1)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (MNP) et passant par le point F.
7. On note L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP).
   Montrer que les coordonnées du point L sont : $L\left(\frac{4}{7} ; \frac{24}{35} ; \frac{23}{35}\right)$.
8. Montrer que $FL = \frac{3\sqrt{105}}{35}$ puis calculer le volume du tétraèdre FMNP.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur associée à cette base.}$$

EXERCICE 3 (5 points)

Soit k un réel strictement positif. Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$ de paramètre k.

1. Conjectures graphiques :

   On a représenté, ci-dessous, dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = \ln(x)$, la droite d'équation $y = x$ ainsi que la droite d'équation $y = 0{,}2x$:



   À partir du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$ pour $k = 1$ puis pour $k = 0{,}2$.

2. Étude du cas $k = 1$:

   On considère la fonction f, définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, par : $f(x) = \ln(x) - x$.
   On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   (a) Calculer $f'(x)$.

   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0; +\infty[$.
   Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer la valeur exacte des extrema s'il y en a. Les limites aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

   (c) En déduire le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = x$.

3. Étude du cas général :

k est un nombre réel strictement positif. On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \ln(x) - kx$.

On admet que le tableau des variations de la fonction g est le suivant :

x	0		$\frac{1}{k}$		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$g\left(\frac{1}{k}\right)$	↘	$-\infty$

(a) Donner, en fonction du signe de $g\left(\frac{1}{k}\right)$, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$.

(b) Calculer $g\left(\frac{1}{k}\right)$ en fonction du réel k.

(c) Montrer que $g\left(\frac{1}{k}\right) > 0$ équivaut à $\ln(k) < -1$.

(d) Déterminer l'ensemble des valeurs de k pour lesquelles l'équation $\ln(x) = kx$ possède exactement deux solutions.

(e) Donner, selon les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) = kx$.

EXERCICE 4 (5 points)

Pour chacune des cinq questions de cet exercice, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Une urne contient 15 billes indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 15.
La bille numérotée 1 est rouge.
Les billes numérotées 2 à 5 sont bleues.
Les autres billes sont vertes.

On choisit une bille au hasard dans l'urne.
On note R (respectivement B et V) l'événement : « La bille tirée est rouge » (respectivement bleue et verte).

Question 1 :

Quelle est la probabilité que la bille tirée soit bleue ou numérotée d'un nombre pair ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{7}{15}$	$\frac{9}{15}$	$\frac{11}{10}$	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Question 2 :

Sachant que la bille tirée est verte, quelle est la probabilité qu'elle soit numérotée 7 ?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{10}$	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Un jeu est mis en place. Pour pouvoir jouer, le joueur paie la somme de 10 euros appelée la mise. Ce jeu consiste à tirer une bille au hasard dans l'urne.

- Si la bille tirée est bleue, le joueur remporte, en euro, trois fois le numéro de la bille.
- Si la bille tirée est verte, le joueur remporte, en euro, le numéro de la bille.
- Si la bille tirée est rouge, le joueur ne remporte rien.

On note G la variable aléatoire qui donne le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre ce qu'il remporte et sa mise de départ. Par exemple, si le joueur tire la bille bleue numérotée 3, alors son gain algébrique est -1 euro.

Question 3 :

Que vaut $P(G = 5)$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Question 4 :

Quelle est la valeur de $P_R(G = 0)$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
0	$\frac{1}{15}$	1	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Question 5 :

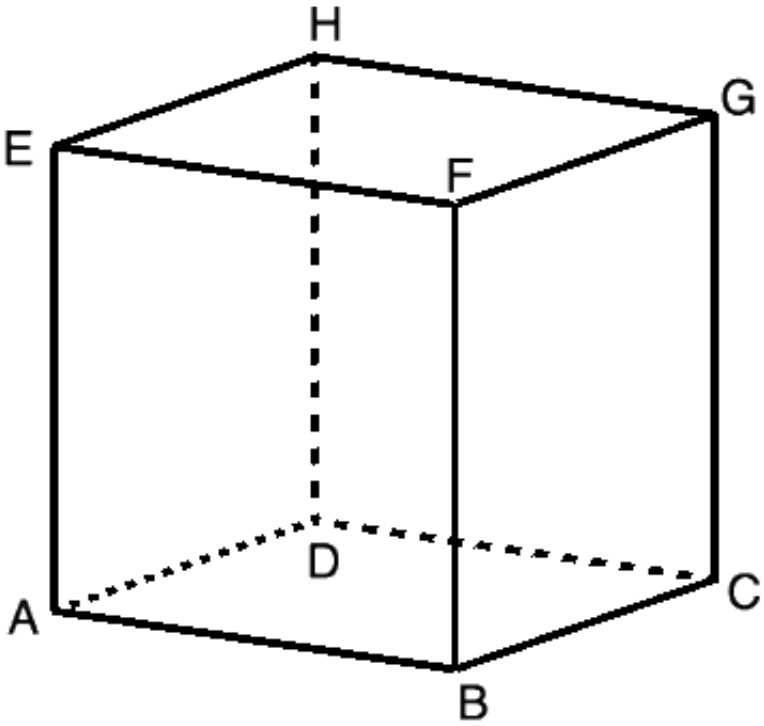
Que vaut $P_{(G=-4)}(V)$?

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{2}$	Aucune des affirmations précédentes n'est juste.

Page blanche laissée intentionnellement.

Ne rien inscrire dessus.

ANNEXE à rendre avec la copie



Modèle CCYC : ©DNE

NOM DE FAMILLE (naissance) :
(en majuscules)

PRENOM :
(en majuscules)

N° candidat :

N° d'inscription :

(Les numéros figurent sur la convocation, si besoin demander à un surveillant.)

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Né(e) le : ☐☐ / ☐☐ / ☐☐☐☐

1.2

42 Asie - Jour 2 (23-MATJ2JA1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice en mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

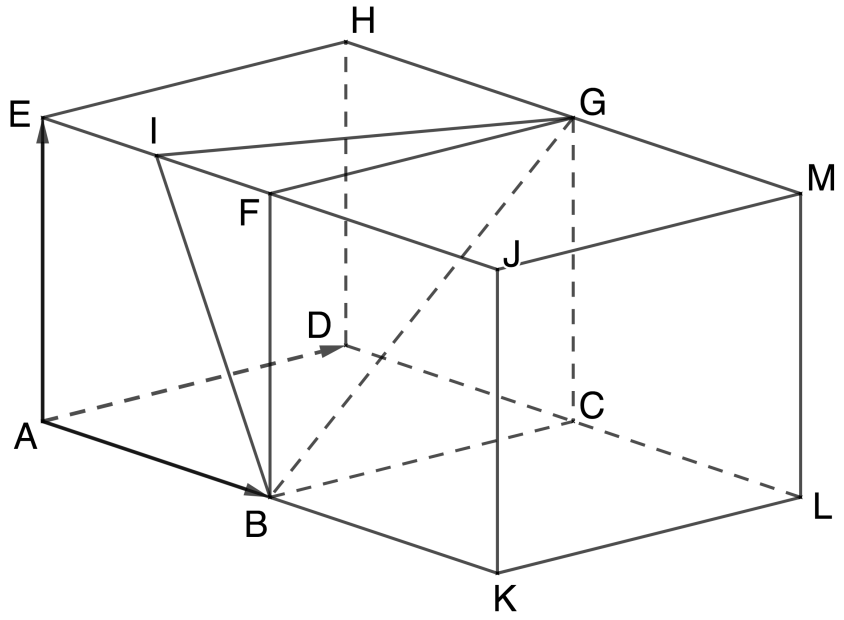
Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Tous les exercices doivent être traités.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidates et les candidats sont invités à faire figurer sur leurs copies toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse.

EXERCICE 1 (5 points)

On considère deux cubes ABCDEFGH et BKLCFJMG positionnés comme sur la figure suivante :

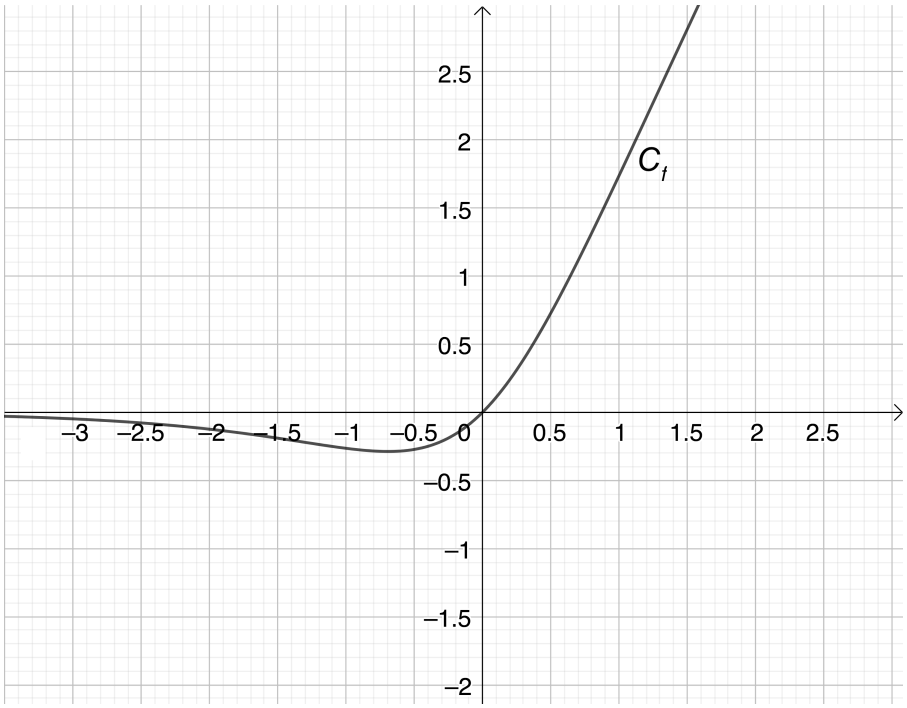


Le point I est le milieu de [EF].
Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}} ; \overrightarrow{\text{AD}} ; \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.
Ainsi, par exemple, les points F, G et J ont pour coordonnées $\text{F}(1 ; 0 ; 1)$, $\text{G}(1 ; 1 ; 1)$ et $\text{J}(2 ; 0 ; 1)$.

1. Montrer que le volume du tétraèdre FIGB est égal à $\dfrac{1}{12}$ d'unité de volume.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :
   $$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante.}$$
2. Déterminer les coordonnées du point I.
3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{DJ}}$ est un vecteur normal au plan (BIG).
4. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BIG) est $2x - y + z - 2 = 0$.
5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, orthogonale à (BIG) et passant par F.
6. (a) La droite d coupe le plan (BIG) au point L.
   Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{6} ; \dfrac{5}{6}\right)$.
   (b) Calculer la longueur FL.
   (c) Déduire des questions précédentes l'aire du triangle IGB.

EXERCICE 2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = \ln(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1)$. On note C_f sa courbe représentée ci-dessous.



Un élève formule les conjectures suivantes à partir de cette représentation graphique :

1. L'équation $f(x) = 2$ semble admettre au moins une solution.
2. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f semble être croissante est $[-0{,}5; +\infty[$.
3. L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ semble être : $y = 1{,}5x$.

Le but de cet exercice est de valider ou rejeter les conjectures concernant la fonction f.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur **R** la fonction g définie par $g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
3. Montrer que $g'(x) = \mathrm{e}^{x}\left(2\mathrm{e}^{x} - 1\right)$ pour tout $x \in$ **R**.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur **R**.
   Dresser le tableau des variations de la fonction g en y faisant figurer la valeur exacte des extrema s'il y en a, ainsi que les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
5. En déduire le signe de g sur **R**.
6. Sans en mener nécessairement les calculs, expliquer comment on pourrait établir le résultat de la question 5 en posant $X = \mathrm{e}^{x}$.

Partie B

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur **R**.
2. La fonction dérivée de la fonction f est notée f'. Justifier que $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[-\ln(2); +\infty[$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-\ln(2); +\infty[$ et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Partie C

À l'aide des résultats de la partie B, indiquer, pour chaque conjecture de l'élève, si elle est vraie ou fausse. Justifier.

EXERCICE 3 (4 points)

Marie Sklodowska-Curie (1867-1934) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française. Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 et un en Chimie en 1911 pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.

Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.
On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.
On admet que, au bout de 24 heures, 0,5% des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.

On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience. Pour $n \geq 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1. (a) Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$
   (b) Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0{,}995v_n + 1{,}5 \times 10^{19}$.
2. (a) Démontrer, par récurrence sur n, que $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par : $u_n = v_n - 3 \times 10^{21}$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison $0{,}995$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $v_n = 3 \times 10^{21}\,(0{,}995^n + 1)$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de jours le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4{,}5 \times 10^{21}$. Justifier la réponse.
5. On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   Pour cela, on utilise une fonction appelée `noyaux` programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

```
1 def noyaux(n):
2     V=6*10**21
3     L=[V]
4     for k in range (n):
5         V=.....
6         L.append(V)
7     return L
```

   (a) À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter la ligne 5 de la fonction `noyaux` afin qu'elle réponde au problème.
   (b) Pour quelle valeur de l'entier `n` la commande `noyaux(n)` renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude ?

EXERCICE 4 (5 points)

Pour chacune des cinq questions de cet exercice, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

On considère L une liste de nombres constituée de termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 7 et de raison 3, le dernier nombre de la liste est 2023 soit : L $= [7\ ;\ 10\ ;\ \cdots\ ;\ 2023]$.

Question 1 : Le nombre de termes de cette liste est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
2023	673	672	2016

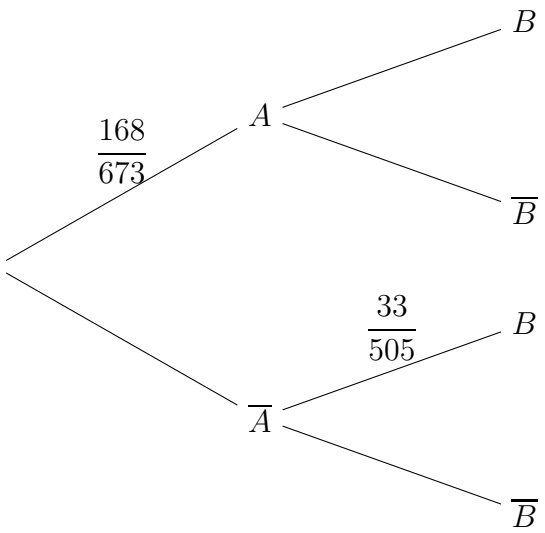
Question 2 : On choisit au hasard un nombre dans cette liste.
La probabilité de tirer un nombre pair est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\frac{1}{2}$	$\frac{34}{673}$	$\frac{336}{673}$	$\frac{337}{673}$

On rappelle qu'on choisit au hasard un nombre dans cette liste.
On s'intéresse aux événements suivants :

- Événement A : « obtenir un multiple de 4 »
- Événement B : « obtenir un nombre dont le chiffre des unités est 6 »

Pour répondre aux questions suivantes on pourra utiliser l'arbre pondéré ci-dessous et on donne $P(A \cap B) = \dfrac{34}{673}$.



Question 3 :
La probabilité d'obtenir un multiple de 4 ayant 6 comme chiffre des unités est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{168}{673} \times \dfrac{34}{673}$	$\dfrac{34}{673}$	$\dfrac{17}{84}$	$\dfrac{168}{34}$

Question 4 : $\mathrm{P}_B(A)$ est égale à :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\dfrac{36}{168}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{33}{168}$	$\dfrac{34}{67}$

Question 5 : On choisit, au hasard, successivement, 10 éléments de cette liste. Un élément peut être choisi plusieurs fois. La probabilité qu'aucun de ces 10 nombres ne soit un multiple de 4 est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$\left(\dfrac{505}{673}\right)^{10}$	$1 - \left(\dfrac{505}{673}\right)^{10}$	$\left(\dfrac{168}{673}\right)^{10}$	$1 - \left(\dfrac{168}{673}\right)^{10}$

43 Amérique du Nord - Jour 1 (23-MATJ1AN1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.

Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

- 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux ;
- 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux ;
- les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

- 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

Les parties A et B sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

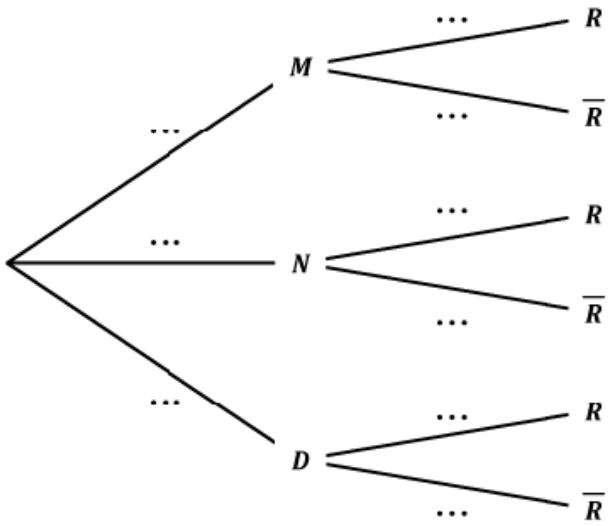
Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les événements suivants :

- M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux » ;
- N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux » ;
- D : « Le déchet prélevé est dangereux » ;
- R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note $\overline{R}$ l'événement contraire de l'événement R.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.



2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à $0{,}0105$.

3. Déterminer la probabilité $P(M \cap \bar{R})$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'événement R est $P(R) = 0{,}6514$.

5. On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à $0{,}6514$.

1. Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

2. Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.

a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.

b. Déterminer la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{3x} - (2x+1)\mathrm{e}^{x}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 3\mathrm{e}^{2x} - 2x - 3$$

1. a. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

2. a. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note g' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $g'(x) = 6\mathrm{e}^{2x} - 2$.

b. Étudier le signe de la fonction dérivée g' sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. Vérifier que la fonction g admet un minimum égal à $\ln(3) - 2$.

3. a. Montrer que $x = 0$ est solution de l'équation $g(x) = 0$.

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une deuxième solution, non nulle, notée α, dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1}.

4. Déduire des questions précédentes le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B – Étude de la fonction f

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
Démontrer que pour tout nombre réel x, on a $f'(x) = \mathrm{e}^{x} g(x)$, où g est la fonction définie dans la **partie A**.

2. En déduire alors le signe de la fonction dérivée f' puis les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Pourquoi la fonction f n'est-elle pas convexe sur $\mathbb{R}$? Expliquer.

Exercice 3 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Les cinq questions sont indépendantes.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les points $A(-1\,;\,2\,;\,5)$, $B(3\,;\,6\,;\,3)$, $C(3\,;\,0\,;\,9)$ et $D(8\,;\,-3\,;\,-8)$.

On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

1. ABC est un triangle :

- **a.** isocèle rectangle en A
- **b.** isocèle rectangle en B
- **c.** isocèle rectangle en C
- **d.** équilatéral

2. Une équation cartésienne du plan (BCD) est :

- **a.** $2x+y+z-15=0$
- **b.** $9x-5y+3=0$
- **c.** $4x+y+z-21=0$
- **d.** $11x+5z-73=0$

3. On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x-2y-2z+15=0$.
On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
On peut affirmer que :

- **a.** $H(-2\,;\,17\,;\,12)$
- **b.** $H(3\,;\,7\,;\,2)$
- **c.** $H(3\,;\,2\,;\,7)$
- **d.** $H(-15\,;\,1\,;\,-1)$

4. Soit la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$, avec t réel.

Les droites (BC) et Δ sont :

a. confondues

b. strictement parallèles

c. sécantes

d. non coplanaires

5. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 2z - 6 = 0$.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x - 2y - 2z + 15 = 0$.

On peut affirmer que :

a. les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont strictement parallèles

b. les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (AB)

c. les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (AC)

d. les plans $\mathcal{P}$ et (ABC) sont sécants et leur intersection est la droite (BC)

Exercice 4 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{11}{u_n}\right)$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A – Étude de la suite (u_n)

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$$

Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{11}\,;+\infty\right[$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$.

4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.

5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a.

Partie B – Application géométrique

Pour tout entier naturel n, on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée ℓ_n et longueur L_n .

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$$

1. **a.** Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2{,}2$.

b. Établir que pour tout entier naturel n,

$$\ell_n = \frac{11}{L_n}.$$

2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la **partie A**.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\ell_n \leq \sqrt{11} \leq L_n$.

4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$.
Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.

5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
1   def heron(n):
2       L=5
3       ℓ=2.2
4       for i in range(n):
5           L=(L+ℓ)/2
6           ℓ=11/L
7       return round(ℓ,6),round(L,6)
```

On rappelle que la fonction Python `round(x,k)` renvoie une version arrondie du nombre `x` avec `k` décimales.

a. Si l'utilisateur tape `heron(3)` dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie pour ℓ et L ?

b. Donner une interprétation de ces deux valeurs.

44 Amérique du Nord - Jour 2 (23-MATJ2AN1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé. L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

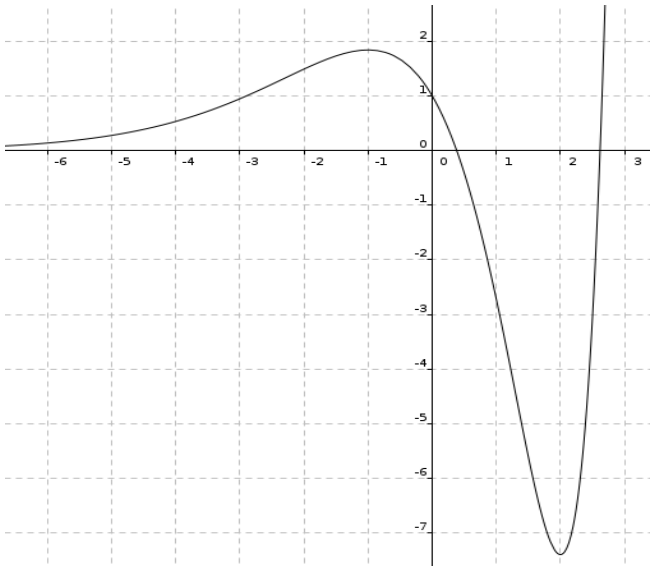
Exercice 1 (5 points)

Partie A

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée.

On donne ci-dessous la courbe représentative de **la fonction dérivée f'** .



Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique de la courbe représentative de la fonction dérivée f'. Aucune justification n'est demandée.

1) Donner le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. *On utilisera des valeurs approchées si besoin.*

2) Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble être convexe.

Partie B

On admet que la fonction f de la **partie A** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 5x + 6)\mathrm{e}^x$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1) a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2) Montrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = (x^2 - 3x + 1)\mathrm{e}^x$.

3) En déduire le sens de variation de la fonction f.

4) Déterminer l'équation réduite de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. On admet que, pour tout réel x, on a $f''(x) = (x + 1)(x - 2)\mathrm{e}^x$.

5) a) Étudier la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\,;\,2]$, on a $f(x) \leq x + 6$.

Exercice 2 (5 points)

On étudie un groupe de $3\,000$ sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.

En 2023, le club A compte $1\,700$ membres et le club B en compte $1\,300$.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n), où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.
L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1\,700$ et $b_0 = 1\,300$.

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe ;
- chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B ;
- chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1) Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.

2) Pour tout entier naturel n, déterminer une relation liant a_n et b_n .

3) Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n, on a : $a_{n+1} = 0{,}75\, a_n + 300$.

4) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :
$$1\,200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1\,700 .$$
b) En déduire que la suite (a_n) converge.

5) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1200$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   b) Exprimer v_n en fonction de n .
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = 500 \times 0{,}75^n + 1200$.

6) a) Déterminer la limite de la suite (a_n) .
b) Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.

7) a) Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à $1\,280$.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1700
    while ... :
        n = n+1
        A = ...
    return ...
```

b) Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction `seuil`.

Exercice 3 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'unité 1 cm, on considère les points
$\mathrm{D}(3\,;\,1\,;\,5)$ $\mathrm{E}(3\,;\,-2\,;\,-1)$ $\mathrm{F}(-1\,;\,2\,;\,1)$ $\mathrm{G}(3\,;\,2\,;\,-3)$.

1) a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{FG}}$.
   b) Justifier que les points E, F et G ne sont pas alignés.

2) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG).
   b) On appelle H le point de coordonnées $(2\,;\,2\,;\,-2)$.
   Vérifier que H est le projeté orthogonal de E sur la droite (FG).
   c) Montrer que l'aire du triangle EFG est égale à 12 cm².

3) a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (EFG).
   b) Déterminer une équation cartésienne du plan (EFG).
   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point D et orthogonale au plan (EFG).
   d) On note K le projeté orthogonal du point D sur le plan (EFG).
   À l'aide des questions précédentes, calculer les coordonnées du point K.

4) a) Vérifier que la distance DK est égale à 5 cm.
   b) En déduire le volume du tétraèdre DEFG.

Exercice 4 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Les cinq questions sont indépendantes.

1) On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 0{,}05 - \dfrac{\ln x}{x-1}$.
   La limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à :
   a) $+\infty$
   b) $0{,}05$
   c) $-\infty$
   d) 0

2) On considère une fonction h continue sur l'intervalle $[-2\,;\,4]$ telle que :
$h(-1) = 0$ $\quad$ $h(1) = 4$ $\quad$ $h(3) = -1$

On peut affirmer que :

a) la fonction h est croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
b) la fonction h est positive sur l'intervalle $[-1\,;\,1]$.
c) il existe au moins un nombre réel a dans l'intervalle $[1;\,3]$ tel que $h(a) = 1$.
d) l'équation $h(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans l'intervalle $[-2\,;\,4]$.

3) On considère deux suites (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et (v_n) converge vers 0.

On peut affirmer que :

a) la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ converge.

b) la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ converge.

c) la suite (u_n) est croissante.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n)^n = -\infty$

4) Pour participer à un jeu, un joueur doit payer 4 €.

Il lance ensuite un dé équilibré à six faces :

- s'il obtient 1, il remporte 12 € ;
- s'il obtient un nombre pair, il remporte 3 € ;
- sinon, il ne remporte rien.

En moyenne, le joueur :

a) gagne 3,5 €.
b) perd 3 €.
c) perd 1,5 €.
d) perd 0,5 €.

5) On considère la variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(3\,;\,p)$.

On sait que $P(X = 0) = \frac{1}{125}$. On peut affirmer que :

a) $p = \frac{1}{5}$

b) $P(X = 1) = \frac{124}{125}$

c) $p = \frac{4}{5}$

d) $P(X = 1) = \frac{4}{5}$

45 La Réunion - Jour 1 (23-MATJ1LR1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

La qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotés de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 1 (5 points)

Une entreprise appelle des personnes par téléphone pour leur vendre un produit.

- L'entreprise appelle chaque personne une première fois :
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à $0{,}6$;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à $0{,}3$.
- Si la personne n'a pas décroché au premier appel, on procède à un second appel :
  - la probabilité que la personne ne décroche pas est égale à $0{,}3$;
  - si la personne décroche, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à $0{,}2$.
- Si une personne ne décroche pas au second appel, on cesse de la contacter.

On choisit une personne au hasard et on considère les évènements suivants :

D_1 : « la personne décroche au premier appel » ;
D_2 : « la personne décroche au deuxième appel » ;
A : « la personne achète le produit ».

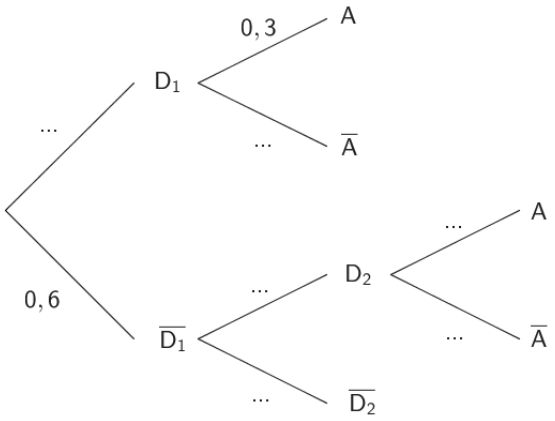
Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

2. En utilisant l'arbre pondéré, montrer que la probabilité de l'évènement A est $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0{,}204$.

3. On sait que la personne a acheté le produit.
Quelle est la probabilité qu'elle ait décroché au premier appel ?



Partie B

On rappelle que, pour une personne donnée, la probabilité qu'elle achète le produit est égale à $0{,}204$.

1. On considère un échantillon aléatoire de 30 personnes.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes de l'échantillon qui achètent le produit.

a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner, sans justifier, ses paramètres.

b. Déterminer la probabilité qu'exactement 6 personnes de l'échantillon achètent le produit. Arrondir le résultat au millième.

c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X. Interpréter le résultat.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère désormais un échantillon de n personnes. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins l'une des personnes de l'échantillon achète le produit soit supérieure ou égale à $0{,}99$.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3x + 1 - 2x\ln(x)\,.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. **a.** Démontrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 - 2\ln(x)\,.$$

   b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On fera figurer dans ce tableau les limites ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

3. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0\,;+\infty[$. On notera α cette solution.

   b. En déduire le signe de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

4. On considère une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. On la note F.

   Peut-on affirmer que la fonction F est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[e^{\frac{1}{2}}\,;+\infty\right[$? Justifier.

5. **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
   Quelle est la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes ?

   b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

   c. Déduire des questions **5.a** et **5.b** que pour tout réel x strictement positif :

$$\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}\,.$$

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}n + 1\,.$$

Partie A

Cette partie est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. La valeur de u_2 est égale à :

a. $\frac{11}{4}$ **b.** $\frac{13}{2}$

c. $3{,}5$ **d.** $2{,}7$

2. La suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n$ est :

a. arithmétique de raison $\frac{1}{2}$. **b.** géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

c. constante. **d.** ni arithmétique, ni géométrique.

3. On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python.

`n` *désigne un entier naturel non nul.*

On rappelle qu'en langage Python « `i in range(n)` » *signifie que* `i` *varie de* `0` *à* `n-1`.

```
1  def terme(n):
2      U=3
3      for i in range(n):
4          ……
5      return U
```

Pour que `terme(n)` renvoie la valeur de u_n, on peut compléter la ligne **4** par :

a. `U=U/2+(i+1)/2+1` **b.** `U=U/2+n/2+1`

c. `U=U/2+(i-1)/2+1` **d.** `U=U/2+i/2+1`

Partie B

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

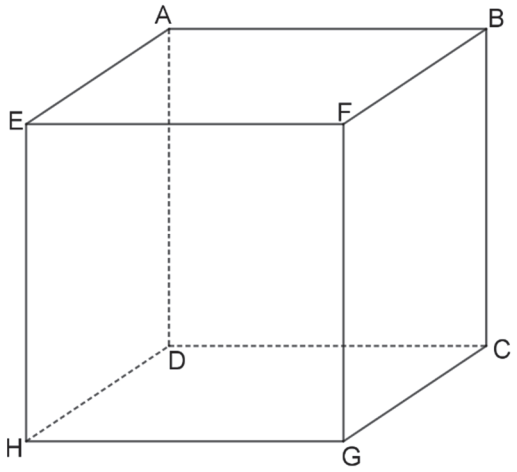
$$n \leq u_n \leq n + 3\,.$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous tel que $AB = 1$.
On note M le centre de la face $BCGF$ et N le centre de la face $EFGH$.



On se place dans le repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points F et C.

2. Calculer les coordonnées des points M et N.

3. **a.** Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (HFC).

   b. En déduire une équation cartésienne du plan (HFC).

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).

5. Démontrer que le point R de coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (HFC).

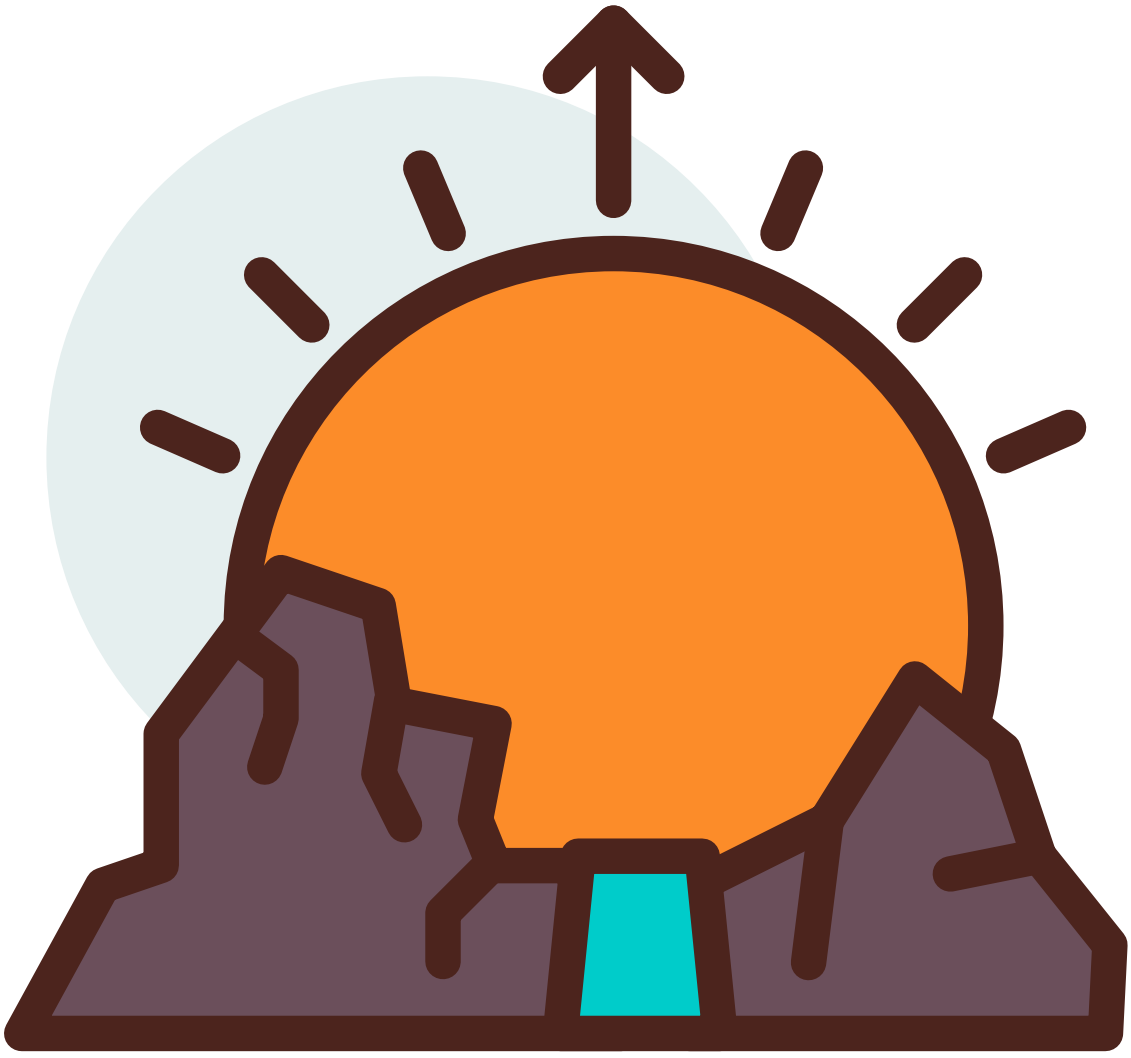
6. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (FG) est :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

   Démontrer qu'il existe un unique point K sur la droite (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.

7. Quelle fraction du volume du cube $ABCDEFGH$ le volume du tétraèdre $FNKM$ représente-t-il ?

46 La Réunion - Jour 2 (23-MATJ2LR1)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

La qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotés de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 1 (5 points)

Un commerçant vend deux types de matelas : matelas RESSORTS et matelas MOUSSE. On suppose que chaque client achète un seul matelas.

On dispose des informations suivantes :

- 20% des clients achètent un matelas RESSORTS. Parmi eux, 90% sont satisfaits de leur achat.
- 82% des clients sont satisfaits de leur achat.

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

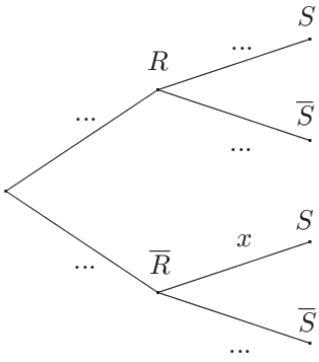
Partie A

On choisit au hasard un client et on note les évènements :

- R : « le client achète un matelas RESSORTS »,
- S : « le client est satisfait de son achat ».

On note $x = P_{\overline{R}}(S)$, où $P_{\overline{R}}(S)$ désigne la probabilité de S sachant que R n'est pas réalisé.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.



2. Démontrer que $x = 0{,}8$.

3. On choisit un client satisfait de son achat. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un matelas RESSORTS ?
On arrondira le résultat à 10^{-2} .

Partie B

1. On choisit 5 clients au hasard. On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de clients satisfaits de leur achat parmi ces 5 clients.

a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.

b. Déterminer la probabilité qu'au plus trois clients soient satisfaits de leur achat.
On arrondira le résultat à 10^{-3} .

2. Soit n un entier naturel non nul.
On choisit à présent n clients au hasard. Ce choix peut être assimilé à un tirage au sort avec remise.

a. On note p_n la probabilité que les n clients soient tous satisfaits de leur achat. Démontrer que $p_n = 0{,}82^n$.

b. Déterminer les entiers naturels n tels que $p_n < 0{,}01$.
Interpréter dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5} .$$

1. Calculer u_1.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5} .$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5} .$$

a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1} .$$

a. Calculer v_0 .

b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

c. Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n).

En déduire la limite de (u_n).

5. On considère la fonction Python `seuil` ci-contre, où `A` est un nombre réel strictement plus grand que 2.

Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande `seuil(2.001)` puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(A):
    n = 0
    u = 8
    while u > A:
        u = (6*u + 2)/(u + 5)
        n = n + 1
    return n
```

EXERCICE 3 (5 points)

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le point $A(1\,;1\,;0)$ et le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $x+4y+2z+1=0$.

1. On note (d) la droite passant par A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$.
Déterminer une représentation paramétrique de (d).

2. Justifier que la droite (d) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants en un point B dont les coordonnées sont $(1\,;-1\,;1)$.

3. On considère le point $C(1\,;-1\,;-1)$.

a. Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

4. **a.** Justifier que le triangle ABC est isocèle en A.

b. Soit H le milieu du segment $[BC]$.
Calculer la longueur AH puis l'aire du triangle ABC.

5. Soit D le point de coordonnées $(0\,;-1\,;1)$.

a. Montrer que la droite (BD) est une hauteur de la pyramide $ABCD$.

b. Déduire des questions précédentes le volume de la pyramide $ABCD$.

On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par :

$$V=\frac{1}{3}\mathcal{B}\times h\ ,$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

EXERCICE 4 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = 2x\mathrm{e}^x$.

Le nombre de solutions sur **R** de l'équation $f(x) = -\frac{73}{100}$ est égal à :

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** une infinité.

2. On considère la fonction g définie sur **R** par :

$$g(x) = \frac{x + 1}{\mathrm{e}^x} .$$

La limite de la fonction g en $-\infty$ est égale à :

a. $-\infty$ **b.** $+\infty$ **c.** 0 **d.** elle n'existe pas.

3. On considère la fonction h définie sur **R** par :

$$h(x) = (4x - 16)\mathrm{e}^{2x}.$$

On note $\mathcal{C}_h$ la courbe représentative de h dans un repère orthogonal.
On peut affirmer que :

a. h est convexe sur **R**. **b.** $\mathcal{C}_h$ possède un point d'inflexion en $x = 3$.

c. h est concave sur **R**. **d.** $\mathcal{C}_h$ possède un point d'inflexion en $x = 3{,}5$.

4. On considère la fonction k définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$k(x) = 3\ln(x) - x .$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction k dans un repère orthonormé.
On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.
Une équation de T est :

a. $y = (3 - \mathrm{e})x$ **b.** $y = \left(\frac{3-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)x$

c. $y = \left(\frac{3}{\mathrm{e}} - 1\right)x + 1$ **d.** $y = (\mathrm{e} - 1)x + 1$

5. On considère l'équation $(\ln(x))^2 + 10\ln(x) + 21 = 0$, avec $x \in]0;+\infty[$.
Le nombre de solutions de cette équation est égal à :

a. 0 **b.** 1 **c.** 2 **d.** une infinité.

47 Nouvelle-Calédonie - Jour 1 (23-MATJ1NC1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

La qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotés de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 1 (5 points)

Une entreprise de location de bateaux de tourisme propose à ses clients deux types de bateaux : bateau à voile et bateau à moteur.

Par ailleurs, un client peut prendre l'option PILOTE. Dans ce cas, le bateau, qu'il soit à voile ou à moteur, est loué avec un pilote.

On sait que :

- $60\ \%$ des clients choisissent un bateau à voile ;
  parmi eux, $20\ \%$ prennent l'option PILOTE.
- $42\ \%$ des clients prennent l'option PILOTE.

On choisit au hasard un client et on considère les événements :

- V : « le client choisit un bateau à voile » ;
- L : « le client prend l'option PILOTE ».

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure.

2. Calculer la probabilité que le client choisisse un bateau à voile et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE.

3. Démontrer que la probabilité que le client choisisse un bateau à moteur et qu'il prenne l'option PILOTE est égale à $0{,}30$.

4. En déduire $P_{\overline{V}}(L)$, probabilité de L sachant que V n'est pas réalisé.

5. Un client a pris l'option PILOTE.
Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un bateau à voile ? Arrondir à $0{,}01$ près.

Partie B

Lorsqu'un client ne prend pas l'option PILOTE, la probabilité que son bateau subisse une avarie est égale à $0{,}12$. Cette probabilité n'est que de $0{,}005$ si le client prend l'option PILOTE.
On considère un client. On note A l'événement : « son bateau subit une avarie ».

1. Déterminer $P(L \cap A)$ et $P(\overline{L} \cap A)$.

2. L'entreprise loue 1000 bateaux. À combien d'avaries peut-elle s'attendre ?

Partie C

On rappelle que la probabilité qu'un client donné prenne l'option PILOTE est égale à $0{,}42$.
On considère un échantillon aléatoire de 40 clients. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de clients de l'échantillon prenant l'option PILOTE.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
Donner sans justification ses paramètres.

2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'au moins 15 clients prennent l'option PILOTE.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3 .$$

1. **a.** Démontrer que $u_1 = 12$.

b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.

c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \geq n + 1 .$$

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1 .$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Donner sa raison et son premier terme v_0 .

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1 .$$

d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^7$.

```
def suite():
    u=3
    n=0
    while   …   :
        u=   …
        n=n+1
    return n
```

a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.

b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

EXERCICE 3 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^x$.
Une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

a. $F(x) = 1 + xe^x$ **b.** $F(x) = (1+x)e^x$

c. $F(x) = (2+x)e^x$ **d.** $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x$

***

Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. On considère les droites (d_1) et (d_2) dont des représentations paramétriques sont respectivement :

$$(d_1)\begin{cases} x = 2 + r \\ y = 1 + r \\ z = -r \end{cases} \quad (r \in \mathbb{R}) \; ; \quad (d_2)\begin{cases} x = 1 - s \\ y = -1 + s \\ z = 2 - s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Les droites (d_1) et (d_2) sont :

a. sécantes. **b.** strictement parallèles.

c. confondues. **d.** non coplanaires.

3. On considère le plan (P) dont une équation cartésienne est : $2x - y + z - 1 = 0$.
On considère la droite (Δ) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 + u \\ y = 4 + u \\ z = 1 - u \end{cases} \quad (u \in \mathbb{R}).$$

La droite (Δ) est :

a. sécante et non orthogonale au plan (P). **b.** incluse dans le plan (P).

c. strictement parallèle au plan (P). **c.** orthogonale au plan (P).

4. On considère le plan (P_1) dont une équation cartésienne est $x - 2y + z + 1 = 0$, ainsi que le plan (P_2) dont une équation cartésienne est $2x + y + z - 6 = 0$.
Les plans (P_1) et (P_2) sont :

a. sécants et perpendiculaires. **b.** confondus.

c. sécants et non perpendiculaires. **d.** strictement parallèles.

5. On considère les points $E(1; 2; 1)$, $F(2; 4; 3)$ et $G(-2; 2; 5)$.
On peut affirmer que la mesure α de l'angle $\widehat{FEG}$ vérifie :

a. $\alpha = 90°$ **b.** $\alpha > 90°$ **c.** $\alpha = 0°$ **d.** $\alpha \approx 71°$

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x) .$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. a. Démontrer que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

3. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$:

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)) .$$

b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

(On admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$.)

4. a. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

5. a. En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha} .$$

En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.

b. En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f.

48 Nouvelle-Calédonie - Jour 2 (23-MATJ2NC1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

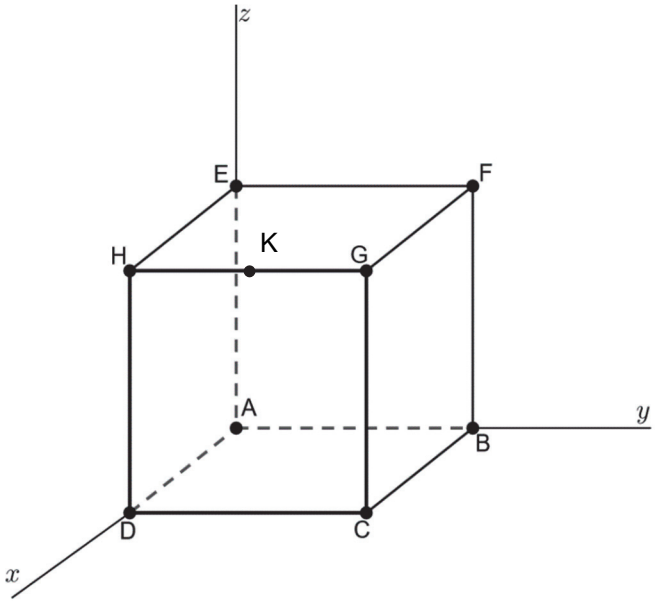
La qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotés de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 1 (5 points)

On considère le cube $\mathrm{ABCDEFGH}$ d'arête 1 représenté ci-contre.



On note K le milieu du segment $[\mathrm{HG}]$.

On se place dans le repère orthonormé $(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}\ ,\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\ )$.

1. Justifier que les points C, F et K définissent un plan.

2. a. Donner, sans justifier, les longueurs KG, GF et GC.

b. Calculer l'aire du triangle FGC.

c. Calculer le volume du tétraèdre FGCK .

On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3}\mathcal{B} \times h,$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.

3. a. On note $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Démontrer que $\vec{n}$ est normal au plan (CFK).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (CFK) est :

$$x + 2y + z - 3 = 0.$$

4. On note Δ la droite passant par le point G et orthogonale au plan (CFK).
Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \ .$$

5. Soit L le point d'intersection entre la droite Δ et le plan (CFK).

a. Déterminer les coordonnées du point L.

b. En déduire que $LG = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

6. En utilisant la question **2.**, déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle CFK.

EXERCICE 2 (5 points)

On considère la fonction f, définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur $[0\,;+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout x dans $[0\,;+\infty[$, on a $f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x}$,
démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.

2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0\,;+\infty[$:

$$f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.

4. Déterminer, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, le nombre de solutions de l'équation

$$f(x) = \frac{367}{1000}.$$

5. On admet que pour tout x appartenant à $[0\,;+\infty[$:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-2).$$

Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

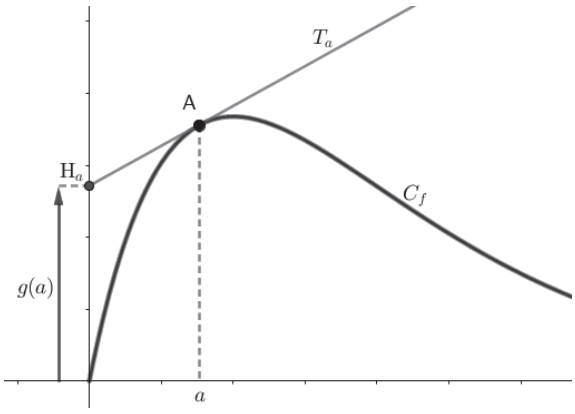
6. Soit a un réel appartenant à $[0\,;+\infty[$ et A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.

On note T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A.

On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.

On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a.

La situation est représentée sur la figure ci-contre.



a. Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est :

$$y = \left((1-a)\mathrm{e}^{-a}\right)\cdot x + a^2\mathrm{e}^{-a}.$$

b. En déduire l'expression de $g(a)$.

c. Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

EXERCICE 3 (5 points)

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3} .$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .

2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme(n):
    u=...
    for i in range(n):
        u=...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range(n)` » signifie que `i` varie de `0` à `n-1`.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme(n)` renvoie la valeur de u_n.

3. Soit la fonction f définie sur $]-3\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x - 4}{x + 3} .$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $]-3\,;\,+\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-2 < u_{n+1} \leq u_n .$$

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2} .$$

a. Donner v_0.

b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1}{n + 0{,}5} - 2 .$$

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une absence de réponse, ou une réponse multiple, ne rapporte ni n'enlève de point.

L'énoncé ci-dessous est commun aux questions 1. et 2.

Les 200 adhérents d'un club sont des filles ou des garçons. Ces adhérents pratiquent l'aviron ou le basket selon la répartition figurant dans le tableau ci-dessous.

	Aviron	**Basket**	**Total**
Filles	25	80	105
Garçons	50	45	95
Total	75	125	200

On choisit un adhérent au hasard et on considère les évènements suivants :

F : l'adhérent est une fille. A : l'adhérent pratique l'aviron.

1. La probabilité de F sachant A est égale à :

a. $\frac{25}{100}$ **b.** $\frac{25}{75}$ **c.** $\frac{25}{105}$ **d.** $\frac{75}{105}$

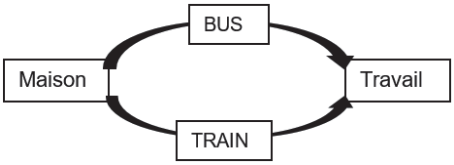
2. La probabilité de l'événement $A \cup F$ est égale à :

a. $\frac{9}{10}$ **b.** $\frac{1}{8}$ **c.** $\frac{31}{40}$ **d.** $\frac{5}{36}$

⁂

L'énoncé ci-dessous est commun aux questions 3. et 4.

Pour se rendre à son travail,
Albert peut utiliser au choix le bus ou le train.



La probabilité que le bus soit en panne est égale à b.
La probabilité que le train soit en panne est égale à t.
Les pannes de bus et de train surviennent de façon indépendante.

3. La probabilité p_1 que le bus ou le train soient en panne est égale à :

a. $p_1 = bt$ **b.** $p_1 = 1 - bt$ **c.** $p_1 = b + t$ **d.** $p_1 = b + t - bt$

4. La probabilité p_2 que Albert puisse se rendre à son travail est égale à :

a. $p_2 = bt$ **b.** $p_2 = 1 - bt$ **c.** $p_2 = b + t$ **d.** $p_2 = b + t - bt$

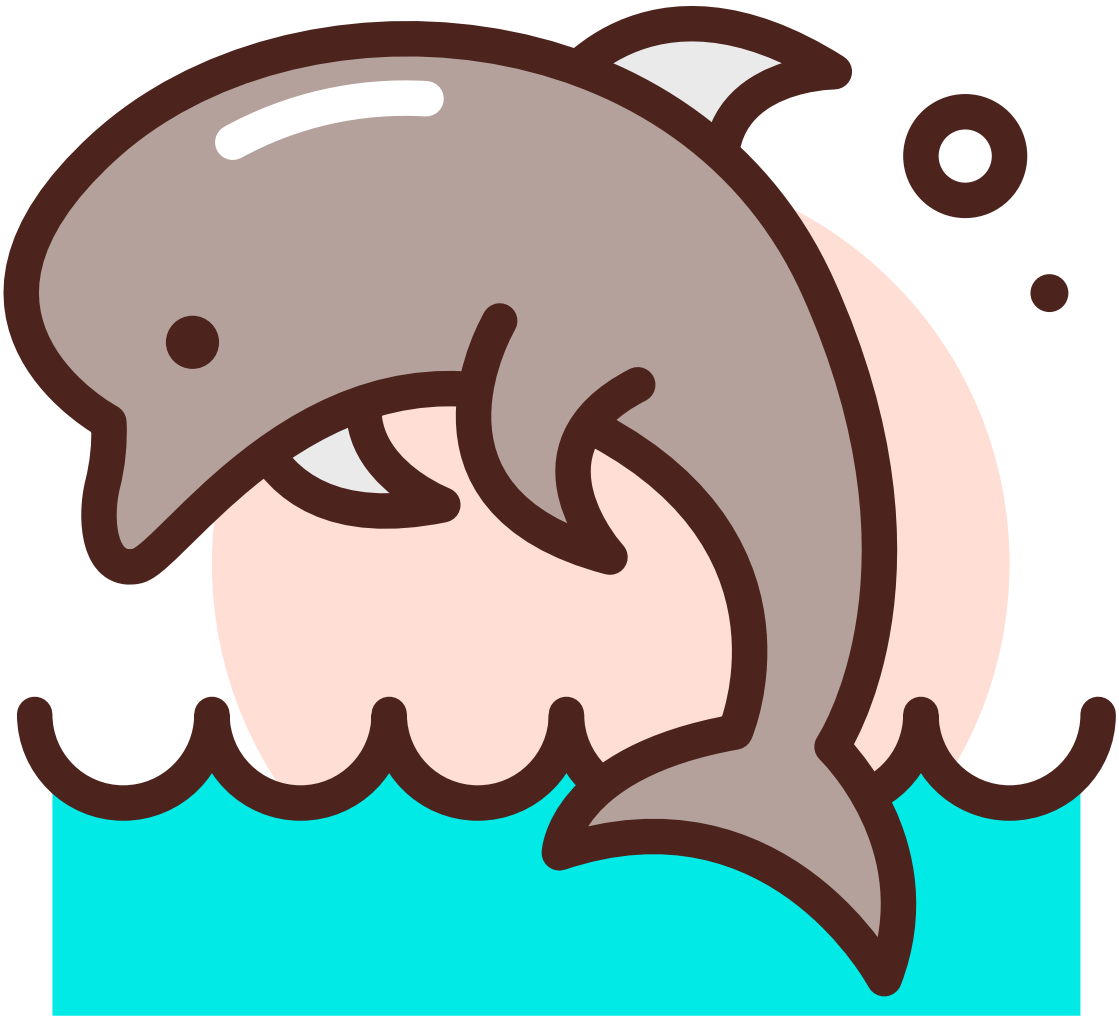
⁂

5. On considère une pièce de monnaie pour laquelle la probabilité d'obtenir FACE est égale à x. On lance la pièce n fois. Les lancers sont indépendants.

La probabilité p d'obtenir au moins une fois FACE sur les n lancers est égale à

a. $p = x^n$ **b.** $p = (1-x)^n$ **c.** $p = 1 - x^n$ **d.** $p = 1 - (1-x)^n$

49 Polynésie - Jour 1 Remplacement (23-MATJ1PO3)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1. (4 points) Thème : probabilités

Une concession automobile vend des véhicules à moteur électrique et des véhicules à moteur thermique.
Certains clients, avant de se rendre sur le site de la concession, ont consulté la plate-forme numérique de la concession. On a ainsi observé que :

- 20 % des clients sont intéressés par les véhicules à moteur électrique et 80 % préfèrent s'orienter vers l'achat d'un véhicule à moteur thermique ;
- lorsqu'un client souhaite acheter un véhicule à moteur électrique, la probabilité pour que le client ait consulté la plate-forme numérique est de 0,5 ;
- lorsqu'un client souhaite acheter un véhicule à moteur thermique, la probabilité pour que le client ait consulté la plate-forme numérique est de 0,375.

On considère les événements suivants :

- C : « un client a consulté la plate-forme numérique » ;
- E : « un client souhaite acquérir un véhicule à moteur électrique » ;
- T : « un client souhaite acquérir un véhicule à moteur thermique ».

Les clients font des choix indépendants les uns des autres.

1.

a. Calculer la probabilité qu'un client choisi au hasard souhaite acquérir un véhicule à moteur électrique et ait consulté la plate-forme numérique.
On pourra utiliser un arbre pondéré.

b. Démontrer que $P(\mathrm{C}) = 0{,}4$.

c. On suppose qu'un client a consulté la plate-forme numérique.
Calculer la probabilité que le client souhaite acheter un véhicule à moteur électrique.

2. La concession accueille quotidiennement 17 clients en moyenne.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de clients souhaitant acquérir un véhicule à moteur électrique.

a. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

b. Calculer la probabilité qu'au moins trois des clients souhaitent acheter un véhicule à moteur électrique lors d'une journée. Donner le résultat arrondi à 10^{-2} près.

Exercice 2. (6 points) Thème : fonctions

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

On considère la fonction f définie sur **R** par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} + x.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. On admet que f est deux fois dérivable sur **R**.

a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

b. En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur **R.**

c. Justifier que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) > 0$.

d. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur **R**.

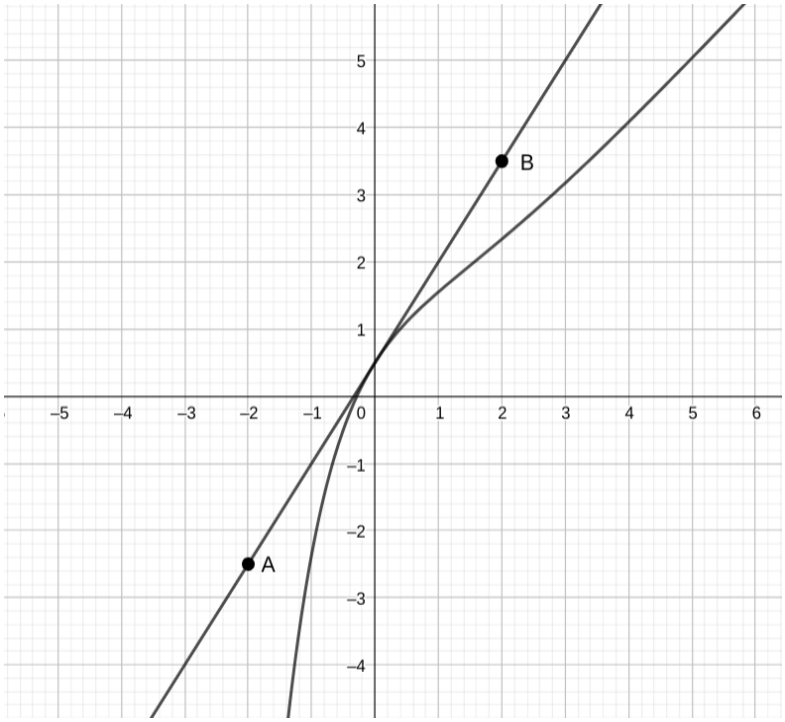
e. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

Partie B

On considère une fonction h, définie et dérivable sur **R**, ayant une expression de la forme $h(x) = (ax + b)\, e^{-x} + x$, où a et b sont deux réels.

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

- la courbe représentative de la fonction h ;
- les points A et B de coordonnées respectives (-2 ; -2,5) et (2 ; 3,5).



1. Conjecturer, avec la précision permise par le graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h.
2. Sachant que la fonction h admet sur **R** une dérivée seconde d'expression
$$h''(x) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x},$$
valider ou non la conjecture précédente.
3. Déterminer une équation de la droite (AB).
4. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de a et b.

Exercice 3. (5 points) Thèmes : suites, algorithmique

On considère la fonction f définie sur **R** par

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3.$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur **R.**

2. En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leq f(x)$.

Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x :

$$f(x) - x = \frac{3}{4}(x-2)^2.$$

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{4}{u_n}^2 - 2u_n + 3$.

4. Etude du cas : $\frac{4}{3} \leq u_0 \leq 2$.

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 2.$$

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Prouver que la limite de la suite est égale à 2.

5. Etude du cas particulier : $u_0 = 3$.

On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Recopier et compléter la fonction « seuil » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :
    u = 3
    n = 0
    while  …
        u = …
        n = …
    return n
```

6. Etude du cas : $u_0 > 2$.

À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas convergente.

Exercice 4. (5 points) Thème : géométrie dans l'espace

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question traitée et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath};\vec{k})$ dans lequel on considère :

- les points $A(6\,;-6\,;6)$, $B(-6\,;0\,;6)$ et $C(-2\,;-2\,;11)$;
- la droite (d) orthogonale aux deux droites sécantes (AB) et (BC) et passant par le point A ;
- la droite (d') de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -6 - 8t \\ y = 4t \\ z = 6 + 5t \end{cases}, \text{ avec } t \in \mathbf{R}.$$

Question 1

Parmi les vecteurs suivants, lequel est un vecteur directeur de la droite (d) ?

a. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-6\\3\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}1\\2\\0{,}2\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

Question 2

Parmi les équations suivantes, laquelle est une représentation paramétrique de la droite (AB) ?

a. $\begin{cases} x = 2t - 6 \\ y = -6 \\ z = t + 6 \end{cases}$, avec $t \in \mathbf{R}$.

b. $\begin{cases} x = 2t - 6 \\ y = -6 \\ z = -t - 6 \end{cases}$, avec $t \in \mathbf{R}$.

c. $\begin{cases} x = 2t + 6 \\ y = -t - 6 \\ z = 6 \end{cases}$, avec $t \in \mathbf{R}$.

d. $\begin{cases} x = 2t + 6 \\ y = t - 6 \\ z = 6 \end{cases}$, avec $t \in \mathbf{R}$.

Question 3

Un vecteur directeur de la droite (d') est :

a. $\overrightarrow{v_1}\begin{pmatrix}-6\\0\\6\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix}-14\\4\\11\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{v_3}\begin{pmatrix}8\\-4\\-5\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{v_4}\begin{pmatrix}8\\-4\\5\end{pmatrix}$

Question 4

Lequel des quatre points suivants appartient à la droite (d') ?

a. $M_1\ (50; -28; -29)$ **b.** $M_2\ (-14; -4; 1)$

c. $M_3\ (2; -4; -1)$ **d.** $M_4\ (-3; 0; 3)$

Question 5

Le plan d'équation $x = 1$ a pour vecteur normal :

a. $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ **d.** $\overrightarrow{n_4}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

50 Métropole - Jour 1 Remplacement (23-MATJ1ME3)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,e^{x^2-3}$.
Une des primitives F de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

a. $F(x) = 2x\,e^{x^2-3}$; **b.** $F(x) = (2x^2+1)\,e^{x^2-3}$; **c.** $F(x) = \frac{1}{2}x\,e^{x^2-3}$; **d.** $F(x) = \frac{1}{2}\,e^{x^2-3}$.

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = e^{2n+1}$.
La suite (u_n) est :

a. arithmétique de raison 2 ;
b. géométrique de raison e;
c. géométrique de raison e^2 ;
d. convergente vers e.

Pour les questions **3.** et **4.**, on considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0 = 15$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 1{,}2u_n + 12$.

3. La fonction Python suivante, dont la ligne 4 est incomplète, doit renvoyer la plus petite valeur de l'entier n telle que $u_n > 10\,000$.

```
def seuil() :
      n=0
      u=15
      while …:
         n=n+1
         u=1.2*u+12
      return(n)
```

À la ligne 4, on complète par :

a. u<=10 000 ; **b.** u = 10 000 ; **c.** u > 10 000 ; **d.** n<= 10 000.

4. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 60$. La suite (v_n) est :

a. une suite décroissante ;
b. une suite géométrique de raison 1,2 ;
c. une suite arithmétique de raison 60 ;
d. une suite ni géométrique ni arithmétique.

Exercice 2 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les points $A(1\,;0\,;-1)$, $B(3\,;-1\,;2)$, $C(2\,;-2\,;-1)$ et $D(4\,;-1\,;-2)$.

On note Δ la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2+t \\ z = -1+t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

1. **a.** Montrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathcal{P}$.

b. Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$. Sur le plan $\mathcal{P}$, que représente le point C par rapport à D ?

c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $2x + y - z - 3 = 0$.

2. **a.** Calculer la distance CD.

b. Existe-t-il un point M du plan $\mathcal{P}$ différent de C vérifiant $MD = \sqrt{6}$? Justifier la réponse.

3. **a.** Montrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ .

b. Montrer que H est le point de Δ associé à la valeur $t = -2$ dans la représentation paramétrique de Δ donnée ci-dessus.

c. En déduire la distance du point D à la droite Δ .

Exercice 3 (4 points)

*Les parties **A** et **B** sont indépendantes.*
Les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*

Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est soit positif, soit négatif.

Dans une population, ce test donne les résultats suivants :

- Si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas ;
- Si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas.

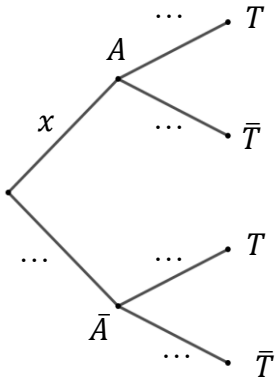
Par ailleurs, 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif.

On choisit au hasard un individu dans la population, et on note :

- A l'événement « l'individu est allergique » ;
- T l'événement « l'individu présente un test positif ».

On notera $\bar{A}$ et $\bar{T}$ les événements contraires de A et T.

On appelle par ailleurs x la probabilité de l'événement A : $x = p(A)$.



Partie A

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.

2. **a.** Démontrer l'égalité : $p(T) = 0{,}927x + 0{,}043$.

b. En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique.

3. Justifier par un calcul l'affirmation suivante :
« Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80% de chances que cet individu soit allergique ».

Partie B :

On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 habitants choisis au hasard, et on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.
On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à $0{,}08$.
On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard associe le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins 10% des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques.

Exercice 4 (7 points)

PARTIE A

On définit sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction g par : $g(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Montrer que pour $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme du second degré $(x^2 - 2x + 2)$.
2. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0{,}5\ ;\ 1]$, que l'on notera α.
4. On donne le tableau de signes de g sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Justifier ce tableau de signes à l'aide des résultats obtenus aux questions précédentes.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = e^x \ln x$.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$, on note f' sa fonction dérivée, f'' sa fonction dérivée seconde et on admet que :
pour tout nombre réel $x > 0$, $f'(x) = e^x\,(\frac{1}{x} + \ln x)$.

Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $f''(x) = e^x\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \ln x\right)$.

2. On pourra remarquer que pour tout réel $x > 0$, $f''(x) = e^x \times g(x)$, où g désigne la fonction étudiée dans la **partie A**.

a. Dresser le tableau de signes de la fonction f'' sur $]0;+\infty[$. Justifier.
b. Justifier que la courbe C_f admet un unique point d'inflexion A.
c. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Justifier.

3. **a.** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b. Montrer que $f'(\alpha) = \frac{e^\alpha}{\alpha^2}(1 - \alpha)$. On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = 0$.
c. Démontrer que $f'(\alpha) > 0$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$.
d. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

51 Métropole - Jour 2 Remplacement (23-MATJ2ME3)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

La paratuberculose est une maladie digestive infectieuse qui touche les vaches. Elle est due à la présence d'une bactérie dans l'intestin de la vache.

On réalise une étude dans une région dont 0,4% de la population de vaches est infectée.

Il existe un test qui met en évidence la réaction immunitaire de l'organisme infecté par la bactérie. Le résultat de ce test peut être soit « positif », soit « négatif ».

On choisit une vache au hasard dans la région.

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- Si la vache est atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit positif est de 0,992 ;
- Si la vache n'est pas atteinte par l'infection, la probabilité que son test soit négatif est de 0,984.

On désigne par :

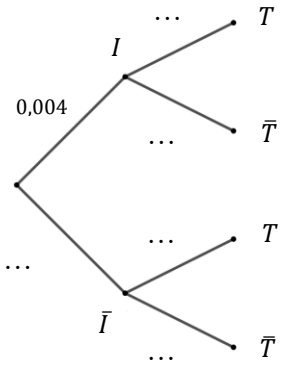
- I l'événement « la vache est atteinte par l'infection » ;
- T l'événement « la vache présente un test positif ».

On note $\bar{I}$ l'événement contraire de I et $\bar{T}$ l'événement contraire de T.

Les parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



2. a. Calculer la probabilité que la vache ne soit pas atteinte par l'infection et que son test soit négatif. On donnera le résultat à 10^{-3} près.

b. Montrer que la probabilité, à 10^{-3} près, que la vache présente un test positif est environ égale à $0{,}020$.

c. La « valeur prédictive positive du test » est la probabilité que la vache soit atteinte par l'infection sachant que son test est positif. Calculer la valeur prédictive positive de ce test. On donnera le résultat à 10^{-3} près.

d. Le test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache lorsque la vache n'est pas infectée et présente un résultat positif au test ou lorsque la vache est infectée et présente un résultat négatif au test.

Calculer la probabilité que ce test donne une information erronée sur l'état de santé de la vache. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

Partie B

3. Lorsqu'on choisit au hasard dans la région un échantillon de 100 vaches, on assimile ce choix à un tirage avec remise.

On rappelle que, pour une vache choisie au hasard dans la région, la probabilité que le test soit positif est égale à 0,02.

On note X la variable aléatoire qui à un échantillon de 100 vaches de la région choisies au hasard associe le nombre de vaches présentant un test positif dans cet échantillon.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait exactement 3 vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

c. Calculer la probabilité que dans un échantillon de 100 vaches, il y ait au plus 3 vaches présentant un test positif. On donnera un résultat à 10^{-3} près.

4. On choisit à présent un échantillon de n vaches dans cette région, n étant un entier naturel non nul. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait, dans l'échantillon, au moins une vache testée positive, soit supérieure ou égale à 0,99.

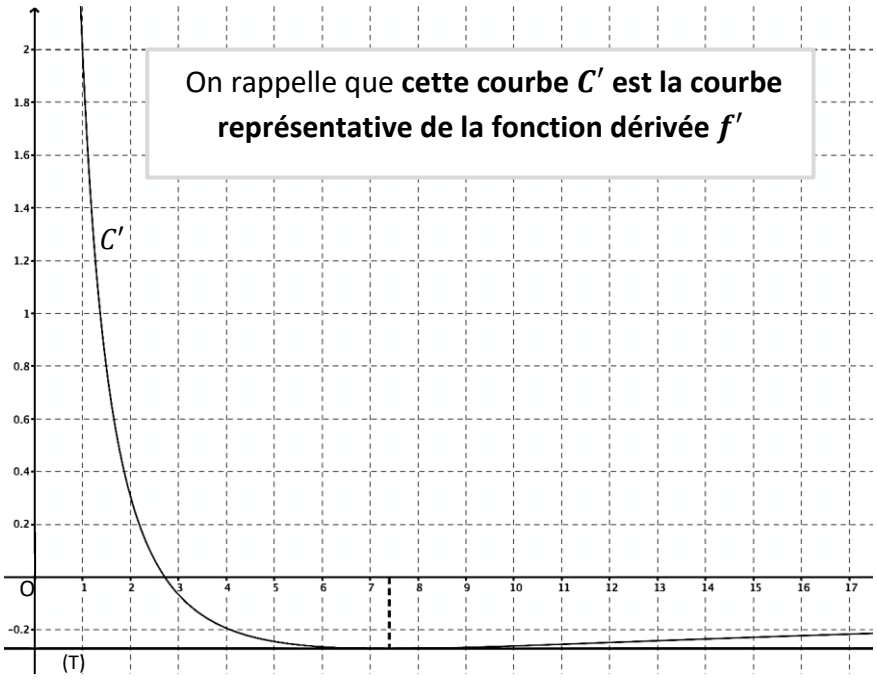
Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = (2 - \ln x) \times \ln x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal et C' la courbe représentative de la fonction f', fonction dérivée de la fonction f.

La **courbe C'** est donnée ci-dessous ainsi que son unique tangente horizontale (T).



1. Par lecture graphique, avec la précision que permet le tracé ci-dessus, donner :
a. le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 1.
b. le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

2. **a.** Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
b. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. Montrer que la courbe C coupe l'axe des abscisses en deux points exactement dont on précisera les coordonnées.

4. **a.** Montrer que pour tout réel x appartenant à $]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x}$.
b. En déduire, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

5. On note f'' la dérivée seconde de f et on admet que pour tout réel x appartenant à $]0;+\infty[$, $f''(x) = \frac{2(\ln x-2)}{x^2}$.
Déterminer par le calcul le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe et préciser les coordonnées du point d'inflexion de la courbe C.

Exercice 3 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{e} \\ \text{pour tout entier } n \geq 1,\ u_{n+1} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n \end{cases}$

1. Calculer les valeurs exactes de u_2 et u_3. On détaillera les calculs.

2. On considère une fonction écrite en langage Python qui, pour un entier naturel n donné, affiche le terme u_n. Compléter les lignes L_2 et L_4 de ce programme.

L_1	def suite(n) :
L_2	…….
L_3	for i in range $(1, n)$:
L_4	$u =$ …….
L_5	return u

3. On admet que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.
a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $1+\frac{1}{n} \leq e$.
b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.
c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

4. **a.** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul, on a : $u_n = \frac{n}{e^n}$.
b. En déduire, si elle existe, la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère :

les points $A(-1;-2;3)$, $B(1;-2;7)$ et $C(1;0;2)$;

la droite Δ de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2 \\ z = -4+3t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$;

le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $3x+2y+z-4=0$;

le plan $\mathcal{Q}$ d'équation cartésienne : $-6x-4y-2z+7=0$.

Question 1 : Lequel des points suivants appartient au plan $\mathcal{P}$?

a. $R(1;-3;1)$; **b.** $S(1;2;-1)$; **c.** $T(1;0;1)$; **d.** $U(2;-1;1)$.

Question 2 : Le triangle ABC est :

a. équilatéral ; **b.** rectangle isocèle ; **c.** isocèle non rectangle ; **d.** rectangle non isocèle.

Question 3 : La droite Δ est :

a. orthogonale au plan $\mathcal{P}$; **b.** sécante au plan $\mathcal{P}$;

c. incluse dans le plan $\mathcal{P}$; **d.** strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.

Question 4 : On donne le produit scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = 20$.

Une mesure au degré près de l'angle $\widehat{ABC}$ est :

a. 34° ; **b.** 120° ; **c.** 90° ; **d.** 0°.

Question 5 : L'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est :

a. un plan ; **b.** l'ensemble vide ; **c.** une droite ; **d.** réduite à un point.

52 Amérique du Sud - Jour 1 (23-MATJ1AS1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES
JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Dès que le sujet est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x)$.

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Justifier que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ et, en remarquant que $f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$, justifier que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = -4x \ln(x)$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$ et que $\alpha \in [1 ; e]$.

On admet, dans la suite de l'exercice, que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0 ; 1]$.

5. On donne la fonction ci-dessous écrite en Python. L'instruction *from lycee import** permet d'accéder à la fonction ln.

```
from lycee import *

def f(x) :
    return 1+x**2-2*x**2*ln(x)

def dichotomie(p) :
    a = 1
    b = 2.7
    while b-a > 10**(-p) :
        if f(a)*f((a+b)/2) < 0 :
            b = (a+b)/2
        else:
            a = (a+b)/2
    return (a,b)
```

On écrit dans la console d'exécution :

```
>>> dichotomie(1)
```

Parmi les quatre propositions ci-dessous, recopier celle affichée par l'instruction précédente ? Justifier votre réponse (on pourra procéder par élimination).

Proposition A : (1.75, 1.9031250000000002)
Proposition B : (1.85, 1.9031250000000002)
Proposition C : (2.75, 2.9031250000000002)
Proposition D : (2.85, 2.9031250000000002)

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$, par $g(x)=\frac{\ln(x)}{1+x^2}$.

On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $g'(x)=\frac{f(x)}{x(1+x^2)^2}$.

2. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $x=\alpha$.

On admet que $g(\alpha)=\frac{1}{2\alpha^2}$.

3. On note T_1 la tangente à C_g au point d'abscisse 1 et on note T_α la tangente à C_g au point d'abscisse α.
Déterminer, en fonction de α, les coordonnées du point d'intersection des droites T_1 et T_α.

EXERCICE 2 (5 points)

1. Entre 1998 et 2020, en France, 18 221 965 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 293 898 ont donné naissance à des jumeaux et 4 921 ont donné naissance à au moins trois enfants.

a. Avec une précision de 0,1%, calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance à des jumeaux sur la période 1998-2020.

b. Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance à au moins trois enfants est inférieur à 0,1%. On considère alors que ce pourcentage est négligeable.

On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un seul enfant.
On appelle accouchement double, un accouchement donnant naissance à exactement deux enfants.

On considère dans la suite de l'exercice qu'un accouchement est soit ordinaire, soit double.
La probabilité d'un accouchement ordinaire est égale à 0,984 et celle d'un accouchement double est alors égale à $0{,}016$.

Les probabilités calculées dans la suite seront arrondies au millième.

2. On admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements.
On considère que ces n accouchements sont indépendants les uns des autres.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour.

a. Dans le cas où $n = 20$, préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.

b. Par la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer la plus petite valeur de n telle que $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette maternité, parmi les naissances doubles, on estime qu'il y a 30% de jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc 70% de jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).
Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à 0,49 et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à 0,51.
Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né.

On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

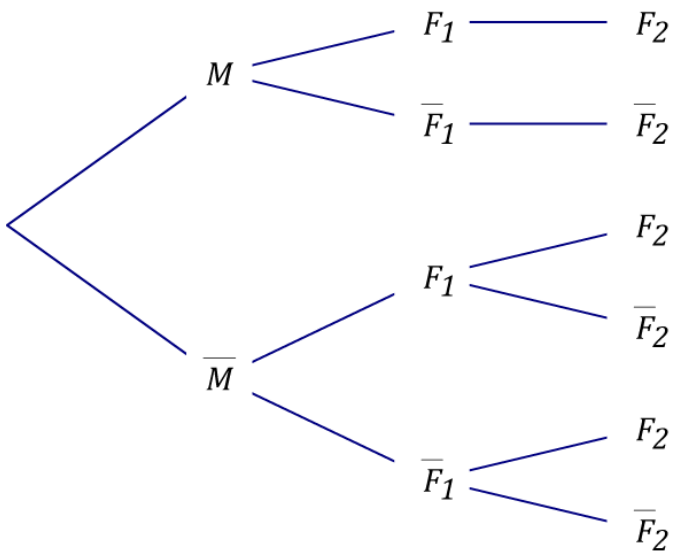
- M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
- F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » ;
- F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».

On notera $P(A)$ la probabilité de l'évènement A et $\bar{A}$ l'évènement contraire de A.

a. Recopier puis compléter l'arbre pondéré ci-dessous.

b. Montrer que la probabilité que les deux nouveau-nés soient des filles est 0,31507.

c. Les deux nouveau-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.



EXERCICE 3 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points $A(0\,;4\,;16)$, $B(0\,;4\,;-10)$, $C(4\,;-8\,;0)$ et $K(0\,;4\,;3)$.

On définit la sphère $\mathcal{S}$ de centre K et de rayon 13 comme l'ensemble des points M tels que $KM = 13$.

1.

a. Vérifier que le point C appartient à la sphère $\mathcal{S}$.

b. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.

2.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

3. On admet que la sphère $\mathcal{S}$ coupe l'axe des abscisses en deux points, l'un ayant une abscisse positive et l'autre une abscisse négative. On note D celui qui a une abscisse positive.

a. Montrer que le point D a pour coordonnées $(12\,;\,0\,;\,0)$.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).

c. Déterminer la distance du point D au plan (ABC).

4. Calculer une valeur approchée, à l'unité de volume près, du volume du tétraèdre ABCD.

On rappelle la formule du volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times \mathcal{h}$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et $\mathcal{h}$ la hauteur associée.

EXERCICE 4 (5 points)

PARTIE A

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1 - x).$$

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.
Calculer u_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

PARTIE B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.
En 2022, cette population compte 3000 individus.

On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année $2022 + n$. Ainsi $P_0 = 3$.
Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du 19e siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.
- **a.** Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
- **b.** Déterminer la limite de P_n.

2. Dans cette question $b = 0{,}2$.
- **a.** Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 0{,}1 \times P_n$.
  Calculer v_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$.
- **b.** Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.

53 Amérique du Sud - Jour 2 (23-MATJ2AS1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES
JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé

Dès que le sujet est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

Un jeu proposé dans une fête foraine consiste à effectuer trois tirs successivement sur une cible mouvante. On a constaté que :

- Si le joueur atteint la cible lors d'un tir alors il ne l'atteint pas lors du tir suivant dans 65 % des cas ;
- Si le joueur n'atteint pas la cible lors d'un tir alors il l'atteint lors du tir suivant dans 50 % des cas.

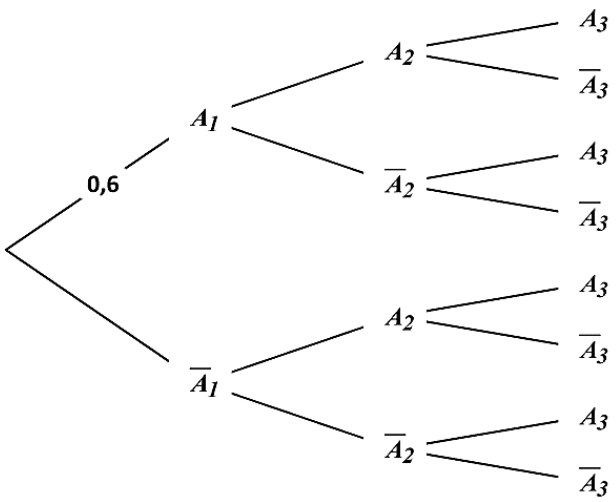
La probabilité qu'un joueur atteigne la cible lors de son premier tir est de 0,6.

Pour tout événement A, on note $P(A)$ sa probabilité et $\bar{A}$ l'événement contraire de A.

On choisit au hasard un joueur à ce jeu de tirs. On considère les événements suivants :

- A_1: « Le joueur atteint la cible lors du 1er tir »
- A_2: « Le joueur atteint la cible lors du 2e tir »
- A_3: « Le joueur atteint la cible lors du 3e tir ».

1. Recopier et compléter, avec les probabilités correspondantes sur chaque branche, l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation.



Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur atteint sa cible au cours des trois tirs.

2. Montrer que la probabilité que le joueur atteigne exactement deux fois la cible au cours des trois tirs est égale à $0{,}4015$.

3. L'objectif de cette question est de calculer l'espérance de la variable aléatoire X, notée $E(X)$.

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,1			0,0735

b. Calculer $E(X)$.

c. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On considère N, un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Un groupe de N personnes se présente à ce stand pour jouer à ce jeu dans des conditions identiques et indépendantes. Un joueur est déclaré gagnant lorsqu'il atteint trois fois la cible. On note Y la variable aléatoire qui compte parmi les N personnes le nombre de joueurs déclarés gagnants.

1. Dans cette question, $N = 15$.
   a. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
   b. Donner la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'exactement 5 joueurs soient gagnants à ce jeu.

2. Par la méthode de votre choix, que vous expliciterez, déterminer le nombre minimum de personnes qui doivent se présenter à ce stand pour que la probabilité qu'il y ait au moins un joueur gagnant soit supérieure ou égale à 0,98.

EXERCICE 2 (5 points)

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points :

$$\mathrm{A}(1\ ;\ 1\ ;\ -4),\ \mathrm{B}(2\ ;\ -1\ ;\ -3),\ \mathrm{C}(0\ ;\ -1\ ;\ -1) \text{ et } \Omega(1\ ;\ 1\ ;\ 2).$$

1. Démontrer que les points A, B, et C définissent un plan.

2. **a.** Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).
   b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + y + z + 2 = 0$.

3. **a.** Justifier que le point Ω n'appartient pas au plan (ABC).
   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point Ω sur le plan (ABC).

On admet que $\Omega\mathrm{H} = 2\sqrt{3}$. On définit la sphère S de centre Ω et de rayon $2\sqrt{3}$ comme l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que $\Omega\mathrm{M} = 2\sqrt{3}$.

4. Justifier, sans calcul, que tout point N du plan (ABC), distinct de H, n'appartient pas à la sphère S.

On dit qu'un plan $\mathcal{P}$ est tangent à la sphère S en un point K lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $\mathrm{K} \in \mathcal{P} \cap S$
- $(\Omega\mathrm{K}) \perp \mathcal{P}$

5. Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + y - z - 6 = 0$ et le point K de coordonnées $\mathrm{K}(3\ ;\ 3\ ;\ 0)$. Démontrer que le plan $\mathcal{P}$est tangent à la sphère S au point K.

6. On admet que les plans (ABC) et $\mathcal{P}$ sont sécants selon une droite (Δ).
Déterminer une équation paramétrique de la droite (Δ).

EXERCICE 3 (5 points)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Soit n un entier naturel.
Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-dessous, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n.

```
def suite_u(n):
    u = ...
    for i in range(1,n+1):
        u = ...
    return u
```

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2n$.
b. En déduire la limite de la suite (u_n).
c. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier naturel n vérifiant, $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?

4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

5. On considère la suite (v_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.
a. En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```
def suite_v(n):
    L = []
    for i in range(n+1):
        L.append(suite_u(i)-2*i+1)
    return L
```

La commande « L.append » permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste L.

Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

Conjecturer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n.
Démontrer cette conjecture.
b. En déduire, pour tout entier naturel n, la forme explicite de u_n en fonction de n.

EXERCICE 4 (5 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + \mathrm{e}^{-x}) + \frac{1}{4}x$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

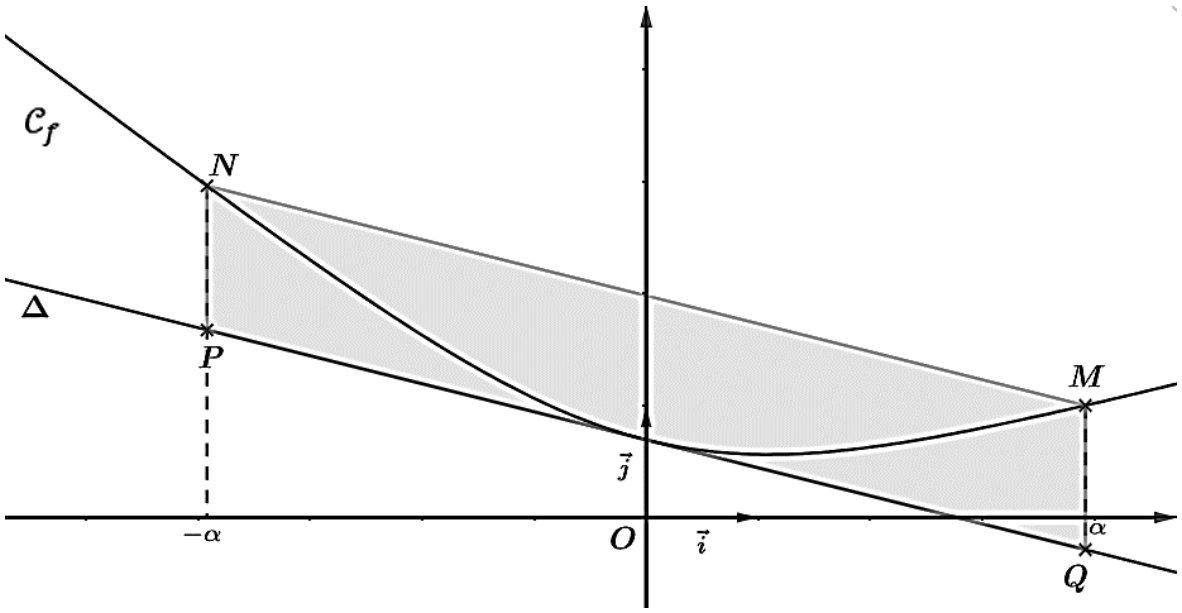
Partie A

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
- **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 3}{4(\mathrm{e}^x + 1)}$.
- **b.** En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- **c.** Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2\,;5]$.

Partie B

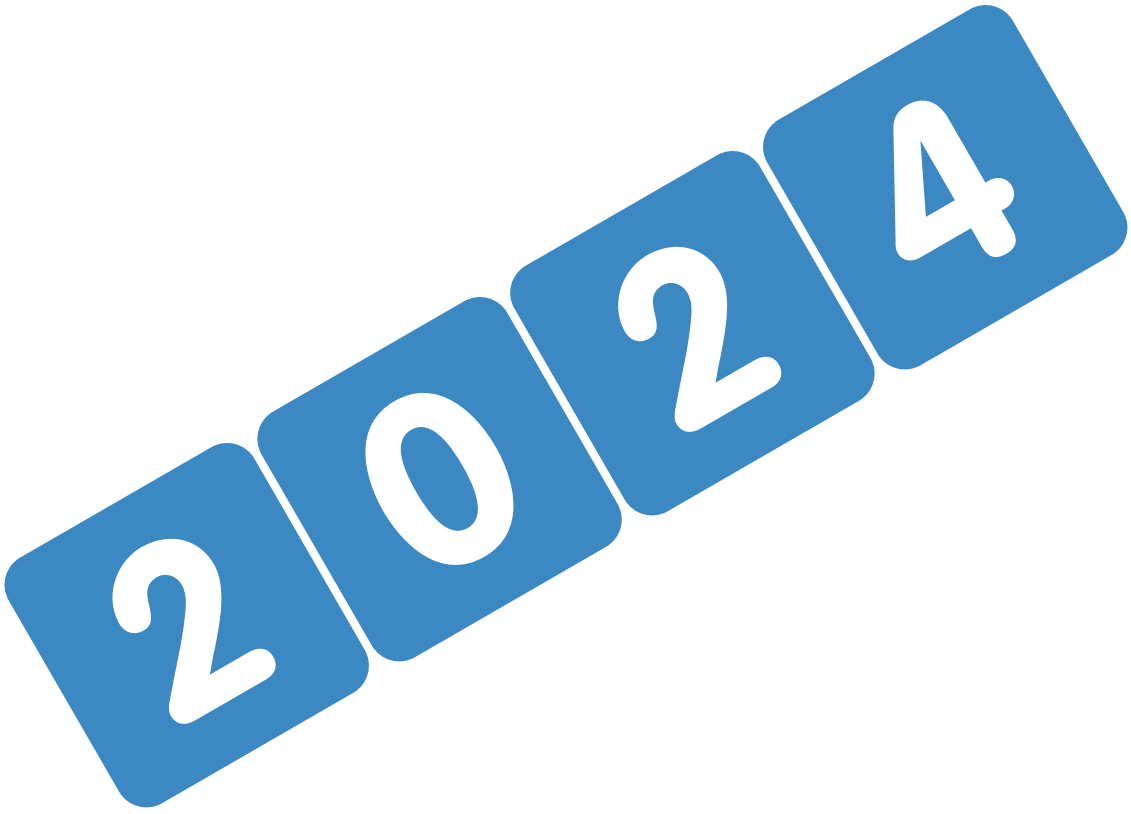
On admettra que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$.
On note Δ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}_f$, la tangente Δ et le quadrilatère $MNPQ$ tel que M et N sont les deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives α et $-\alpha$, et Q et P sont les deux points de la droite Δ d'abscisses respectives α et $-\alpha$.



1. **a.** Justifier le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- **b.** En déduire que la portion de la courbe $\mathcal{C}_f$, sur l'intervalle $[-\alpha\,;\,\alpha]$, est inscrite dans le quadrilatère $MNPQ$.

2. **a.** Montrer que $f(-\alpha) = \ln(\mathrm{e}^{-\alpha} + 1) + \frac{3}{4}\alpha$
- **b.** Démontrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.

Quatrième partie
Session 2024



54 Sujets Zéro (24-MATSUJET0)

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE LA JEUNESSE, DES SPORTS
ET DES JEUX OLYMPIQUES
ET PARALYMPIQUES
Liberté
Égalité
Fraternité

Préparer l'épreuve de spécialité

Mathématiques au baccalauréat général

Exemples d'exercices

Janvier 2024

Le positionnement des épreuves d'enseignement de spécialité au mois de juin modifie la liste des contenus sur lesquels les élèves sont susceptibles d'être interrogés.

À compter de la session 2024, les sujets s'appuieront sur l'ensemble du programme de spécialité du cycle terminal.

Ce document a pour objectif de guider les enseignants dans la formation de leurs élèves de première et terminale de voie générale en spécialité Mathématiques. Il présente huit exemples d'exercices dans lesquels figurent des contenus et des capacités susceptibles d'être évalués lors de l'épreuve du baccalauréat. Cette liste vient compléter l'ensemble des exercices proposés lors des sessions précédentes du baccalauréat.

Exercice 1 :

L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie I

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + y = \mathrm{e}^{-x}$$

1. Soit u la fonction définie sur **R** par $u(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

Vérifier que la fonction u est une solution de l'équation différentielle (E).

2. On considère l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.

Résoudre l'équation différentielle (E') sur **R**.

3. En déduire toutes les solution de l'équation différentielle (E) sur **R**.
4. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 2$.

Partie II

Dans cette partie, k est un nombre réel fixé que l'on cherche à déterminer.

On considère la fonction f_k définie sur **R** par

$$f_k(x) = (x + k)\mathrm{e}^{-x}$$

Soit h la fonction définie sur **R** par

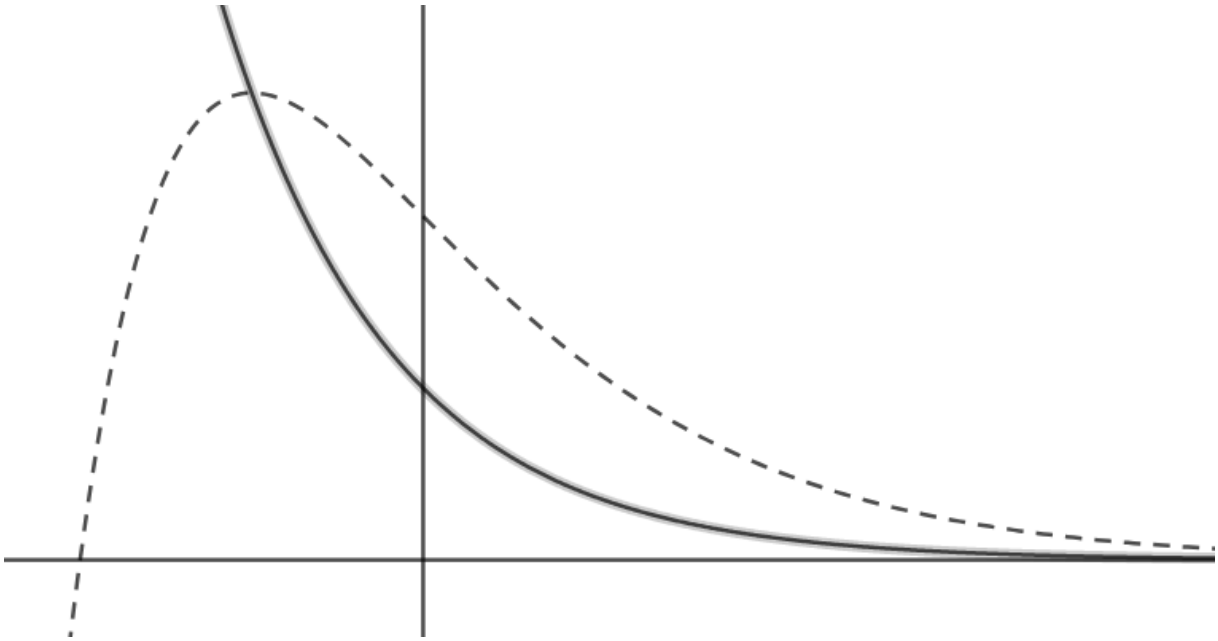
$$h(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthogonal et C la courbe représentative de la fonction h.

On a représenté sur le graphique en annexe les courbes C_k et C sans indiquer les unités sur les axes ni le nom des courbes.

1. Sur le graphique en annexe à rendre avec la copie, l'une des courbes est en traits pointillés, l'autre est en trait plein. Laquelle est la courbe C ?
2. En expliquant la démarche utilisée, déterminer la valeur du nombre réel k et placer sur l'annexe à rendre avec la copie l'unité sur chacun des axes du graphique.

Annexe



Exercice 2

L'exercice est constitué de deux parties indépendantes.

Partie I

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^x$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

1. **a.** On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

   $$F_1(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$$

   Vérifier que F_1 est une primitive de la fonction f_1.

   b. Calculer I_1.

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout n supérieur ou égal à 1,

   $$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n$$

3. Calculer I_2.
4. On considère la fonction `mystere` écrite dans le langage Python :

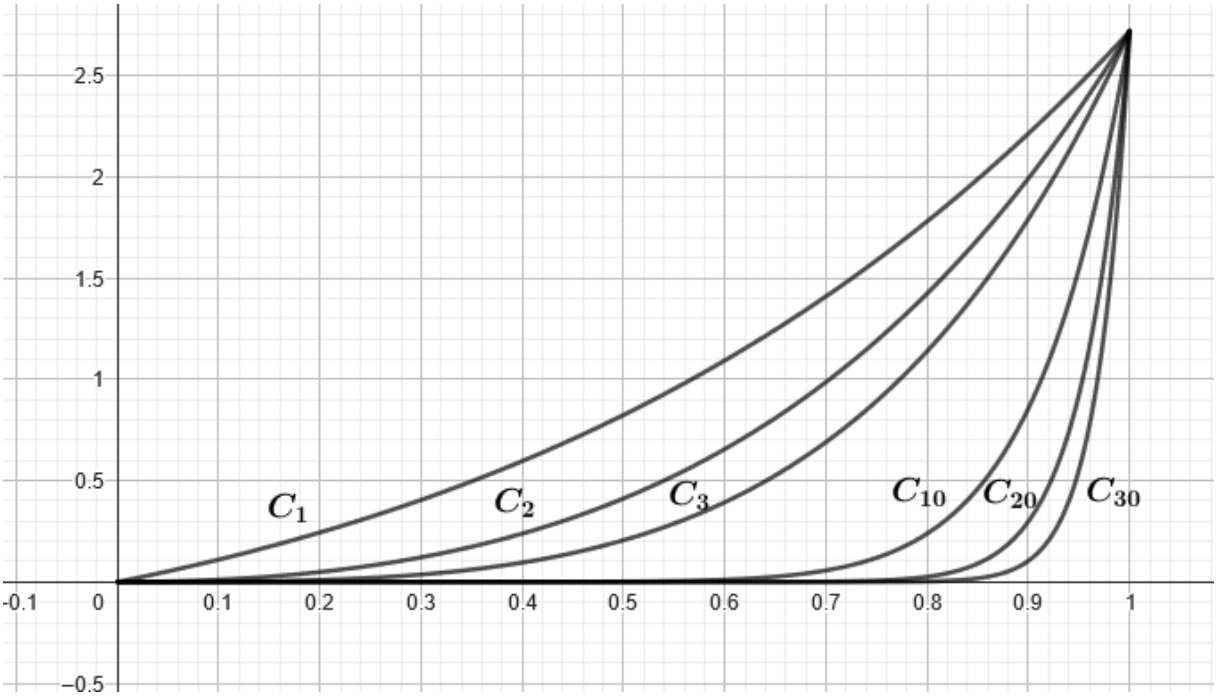
```
from math import e # la constante d'Euler e

def mystere(n):
    a = 1
    L = [a]
    for i in range(1,n):
        a = e - (i+1)*a
        L.append(a)
    return L
```

   À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel `mystere(5)`.

Partie II

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20} et C_{30} .



a. Donner une interprétation graphique de I_n.

b. Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leq I_n \leq \mathrm{e} \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$$

3. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice 3

Dans un examen, une épreuve notée sur dix points est constituée de deux exercices : le premier est noté sur deux points, le deuxième sur huit points.

Partie I

Le premier exercice est constitué de deux questions Q1 et Q2.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte, incomplète ou une absence de réponse rapporte zéro point.

On considère que :

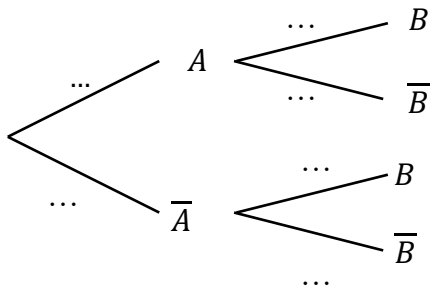
- Un candidat pris au hasard a une probabilité 0,8 de répondre correctement à la question Q1.
- Si le candidat répond correctement à Q1, il a une probabilité 0,6 de répondre correctement à Q2 ; s'il ne répond pas correctement à Q1, il a une probabilité 0,1 de répondre correctement à Q2.

On prend un candidat au hasard et on note :

- A l'événement : « le candidat répond correctement à la question Q1 » ;
- B l'événement : « le candidat répond correctement à la question Q2 ».

On note $\bar{A}$ et $\overline{B}$ les événements contraires de A et de B.

1. Recopier et compléter les pointillés de l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement aux deux questions Q1 et Q2.

3. Calculer la probabilité que le candidat réponde correctement à la question Q2.

On note :

- X_1 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q1 ;
- X_2 la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à la question Q2 ;
- X la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note à l'exercice, c'est-à-dire $X = X_1 + X_2$.

4. Déterminer l'espérance de X_1 et de X_2. En déduire l'espérance de X. Donner une interprétation de l'espérance de X dans le contexte de l'exercice.

5. On souhaite déterminer la variance de X.

a. Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 2)$. En déduire $P(X = 1)$.

b. Montrer que la variance de X vaut $0{,}57$.

c. A-t-on $V(X) = V(X_1) + V(X_2)$? Est-ce surprenant ?

Partie II

Le deuxième exercice est constitué de huit questions indépendantes.

Chaque question est notée sur un point. Une réponse correcte rapporte un point ; une réponse incorrecte et une absence de réponse rapporte zéro point.

Les huit questions sont de même difficulté : pour chacune des questions, un candidat a une probabilité $\frac{3}{4}$ de répondre correctement, indépendamment des autres questions.

On note Y la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note au deuxième exercice, c'est-à-dire le nombre de bonnes réponses.

1. Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Donner la valeur exacte de $P(Y = 8)$.
3. Donner l'espérance et la variance de Y.

Partie III

On suppose que les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes. On note la variable aléatoire qui, à un candidat, associe sa note totale à l'examen : $Z = X + Y$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z.

2. Soit n un nombre entier strictement positif.

   Pour i entier variant de 1 à n, on note Z_i la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la note de l'élève numéro i à l'examen.

   On admet que les variables aléatoires $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sont identiques à Z et indépendantes.

   On note M_n la variable aléatoire qui, à un échantillon de n élèves, associe la moyenne de leurs n notes, c'est-à-dire

   $$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}{n}$$

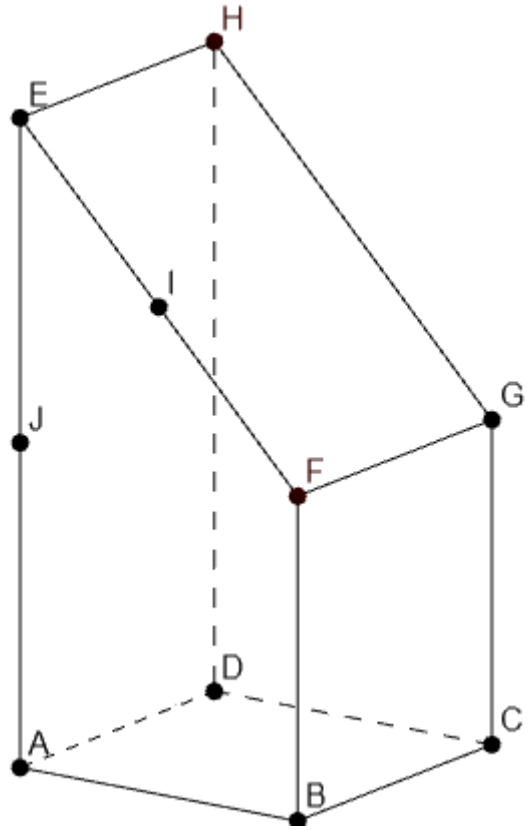
   a. Quelle est l'espérance de M_n ?
   b. Quelles sont les valeurs de n telles que l'écart type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5 ?
   c. Pour les valeurs trouvées en **b.**, montrer que la probabilité que $6{,}3 \leq M_n \leq 8{,}3$ est supérieure ou égale à 0,75.

Exercice 4 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Les questions sont indépendantes.

On considère le prisme droit ABFEDCGH tel que $\mathrm{AB} = \mathrm{AD}$.
Sa base ABFE est un trapèze rectangle en A, vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$.
On note I le milieu du segment [EF].
On note J le milieu du segment [AE].

On associe à ce prisme le repère orthonormé $(\mathrm{A};\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\vec{k})$ tel que :
$\vec{\imath} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ; \vec{\jmath} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}\ ; \vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{AJ}}$.



1. On donne les coordonnées de quatre vecteurs dans la base $(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\vec{k})$. Lequel est un vecteur normal au plan (ABG)?

a. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

b. $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

c. $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

d. $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

2. Parmi les droites suivantes, laquelle est parallèle à la droite (IJ) ?

a. (DG) **b.** (BD) **c.** (AG) **d.** (FG)

3. Quels vecteurs forment une base de l'espace ?

a. $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{CG})$ **b.** $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD})$ **c.** $(\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DG})$ **d.** $(\overrightarrow{CA}\,;\,\overrightarrow{CG}\,;\,\overrightarrow{CE})$

4. Une décomposition du vecteur $\overrightarrow{AG}$ comme somme de plusieurs vecteurs **deux à deux orthogonaux** est :

a. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG}$ **b.** $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AJ}$ **c.** $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JG}$ **d.** $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HG}$

5. Le volume du prisme droit ABFEDCGH, est égal à :

a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{8}{5}$ **c.** $\frac{3}{2}$ **d.** 2

Exercice 5 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.
Les questions sont indépendantes.

1. Sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, l'équation $\sin(x) = 0{,}1$ admet :

a. zéro solution **b.** une solution **c.** deux solutions **d.** quatre solutions

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ par $f(x) = x + \sin(x)$. On admet que f est deux fois dérivable.

a. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[0\,;\pi]$

b. La fonction f est concave sur l'intervalle $[0\,;\pi]$

c. La fonction f admet sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ un unique point d'inflexion

d. La fonction f admet sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ exactement deux points d'inflexion

3. Une urne contient cinquante boules numérotées de 1 à 50. On tire successivement trois boules dans cette urne, **sans remise**. On appelle « tirage » la liste non ordonnée des numéros des trois boules tirées. Quel est le nombre de tirages possibles, **sans tenir compte de l'ordre des numéros**?

a. 50^3 **b.** $1 \times 2 \times 3$ **c.** $50 \times 49 \times 48$ **d.** $\frac{50\times49\times48}{1\times2\times3}$

4. On effectue dix lancers d'une pièce de monnaie. Le résultat d'un lancer est « pile » ou « face ». On note la liste ordonnée des dix résultats.
Quel est le nombre de listes ordonnées possibles ?

a. 2×10 **b.** 2^{10} **c.** $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10$ **d.** $\frac{1\times2\times3\times\cdots\times10}{1\times2}$

5. On effectue n lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Le résultat d'un lancer est « pile » ou « face ». On considère la liste ordonnée des n résultats.
Quelle est la probabilité d'obtenir au plus deux fois « pile » dans cette liste ?

a. $\frac{n(n-1)}{2}$ **b.** $\frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **c.** $1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$ **d.** $\left(1 + n + \frac{n(n-1)}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice 6 :

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On considère la suite (u_n) définie : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n}{1+2u_n} \text{ pour tout entier naturel } n \\ u_0 = 1 \end{cases}$

- **Affirmation 1 :** « $u_4 = \frac{1}{9}$.»
- **Affirmation 2 :** « Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{2n+1}$.»
- **Affirmation 3 :** « La suite numérique (u_n) est minorée par 10^{-10}.»

Exercice 7 :

On considère les fonctions f_k définies sur **R** par $f_k(x) = x + k\mathrm{e}^{-x}$, où k est un réel strictement positif.

1. On s'intéresse dans cette question au cas $k = 0{,}5$, donc à la fonction $f_{0,5}$ définie sur **R** par
$$f_{0,5}(x) = x + 0{,}5\mathrm{e}^{-x}$$
   a. Montrer que la dérivée de $f_{0,5}$ notée $f'_{0,5}$ vérifie $f'_{0,5}(x) = 1 - 0{,}5\mathrm{e}^{-x}$.
   b. Montrer que la fonction $f_{0,5}$ admet un minimum en $\ln(0{,}5)$.

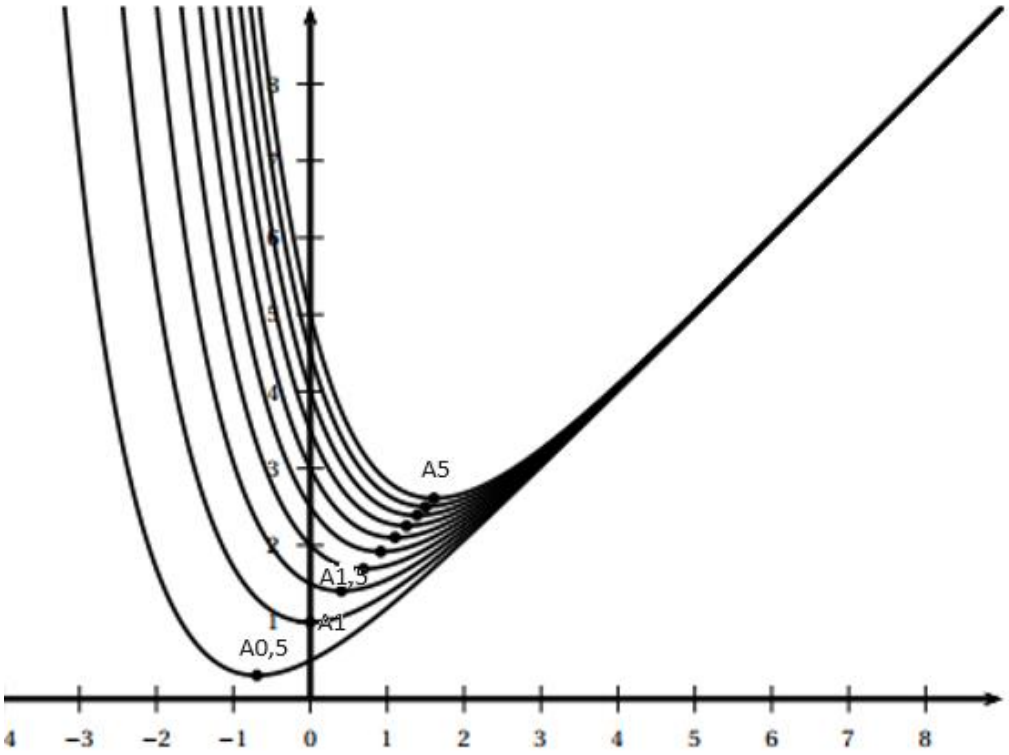
Soit k un réel strictement positif. On donne le tableau de variations de la fonction f_k.

Valeurs de x	$-\infty$		$\ln(k)$		$+\infty$
Variations de f_k	$+\infty$	↘	$f_k(\ln k)$	↗	$+\infty$

2. Montrer que pour tout réel positif k, $f_k(\ln k) = \ln k + 1$.

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On note A_k le point de la courbe $\mathcal{C}_k$ d'abscisse $\ln k$.

On a représenté ci-dessous quelques courbes $\mathcal{C}_k$ pour différentes valeurs de k.



3. Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Justifier la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

- **Affirmation :** « Pour tout réel k strictement positif, les points $A_{0,5}$, A_1 et A_k sont alignés. »

Exercice 8 :

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On considère la suite (u_n) définie par et $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n + 1$ pour tout entier naturel n.

1. On considère la fonction `calcul` écrite dans le langage Python qui renvoie la valeur de u_n.

```
def calcul(n):
    u = 0
    for i in range(n):
        u = 3 * u + 1
    return u
```

On considère par ailleurs la fonction `liste` écrite dans le langage Python :

```
def liste(n):
    l = [ ]
    for i in range(n):
        l.append( calcul(i) )
    return l
```

Affirmation 1 : « l'appel `liste(6)` renvoie la liste `[0, 1, 4, 13, 42, 121]`. »

2.

Affirmation 2 : « pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{1}{2} \times 3^n - \frac{1}{2}$. »

3.

Affirmation 3 : « pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est une puissance de 3. »

55 Amérique du Nord - Jour 1 (24-MATJ1AN1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.

Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :
- la probabilité de tirer un objet rare est de 7 % ;
- si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % ;
- si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet.
On note :
- R l'événement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'événement « le joueur tire une épée » ;
- $\bar{R}$ et $\bar{E}$ les événements contraires des événements R et E.

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.
2. Calculer la probabilité de tirer une épée.
3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. *Arrondir le résultat au millième.*

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.

On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.
2. Déterminer $P(X < 6)$. *Arrondir le résultat au millième.*
3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geq k) \geq 0{,}5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %. Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à $0{,}95$. Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. *On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.*

Exercice 2 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Les cinq questions sont indépendantes.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1. On considère les points $A(1;0;3)$ et $B(4;1;0)$.
Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

a. $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 1 \\ z = -3+3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ **b.** $\begin{cases} x = 1+4t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

c. $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = t \\ z = 3-3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ **d.** $\begin{cases} x = 4+t \\ y = 1 \\ z = 3-3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

On considère la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3+4t \\ y = 6t \\ z = 4-2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite (d) ?

a. $M(7;6;6)$ **b.** $N(3;6;4)$ **c.** $P(4;6;-2)$ **d.** $R(-3;-9;7)$

3. On considère la droite (d') de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2+3k \\ y = -1-2k \\ z = 1+k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Les droites (d) et (d') sont :

a. sécantes **b.** non coplanaires **c.** parallèles **d.** confondues

4. On considère le plan (P) passant par le point $I(2;1;0)$ et perpendiculaire à la droite (d). Une équation du plan (P) est :

a. $2x+3y-z-7=0$ **b.** $-x+y-4z+1=0$
c. $4x+6y-2z+9=0$ **d.** $2x+y+1=0$

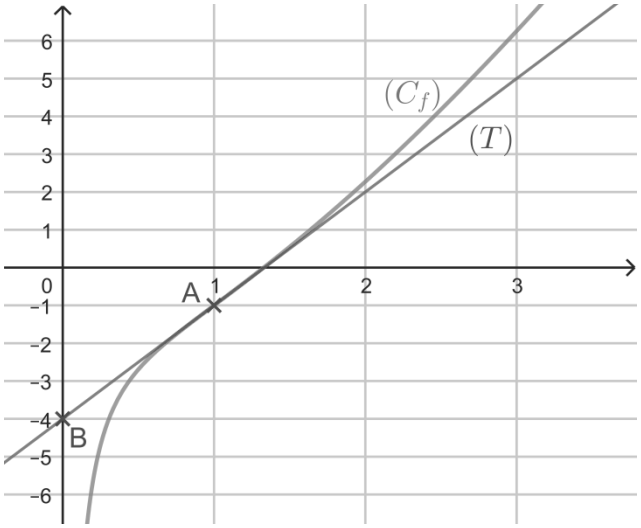
Exercice 3 (5 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x^2) - \frac{1}{x}$$

Partie A : lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative (C_f) de la fonction f, ainsi que la droite (T), tangente à la courbe (C_f) au point A de coordonnées $(1;-1)$. Cette tangente passe également par le point $B(0;-4)$.



1. Lire graphiquement $f'(1)$ et donner l'équation réduite de la tangente (T).
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.
   Que semble représenter le point A pour la courbe (C_f) ?

Partie B : étude analytique

1. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$, puis sa limite en 0.
2. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   a. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$,
   $$f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}$$
3. **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   b. Étudier les variations de la fonction f', puis le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   b. Donner la valeur arrondie au centième de α et montrer que α vérifie :
   $$\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

Exercice 4 (6 points)

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \sin(x) \mathrm{d}x$$

$$J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} \cos(x)\, \mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0 .

2. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geq 0$.
b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leq 0$.
c. Déduire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leq \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\, \mathrm{d}x$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\, \mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$$

c. Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n) .

4. **a.** En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - n\, J_n \qquad \text{et} \qquad I_n = \frac{1}{n}\, J_n$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $I_n = \frac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}$.

5. On souhaite obtenir le rang `n` à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1. Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1    from math import *
2    def seuil():
3         n=0
4         I=2
5         . . .
6              n=n+1
7              I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8         return n
```

56 Amérique du Nord - Jour 2 (24-MATJ2AN1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Les données publiées le 1er mars 2023 par le ministère de la transition écologique sur les immatriculations de véhicules particuliers en France en 2022 contiennent les informations suivantes :

- $22{,}86$ % des véhicules étaient des véhicules neufs ;
- $8{,}08$ % des véhicules neufs étaient des hybrides rechargeables ;
- $1{,}27$ % des véhicules d'occasion (c'est-à-dire qui ne sont pas neufs) étaient des hybrides rechargeables.

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au dix-millième.

Partie A

Dans cette partie, on considère un véhicule particulier immatriculé en France en 2022.
On note :

- N l'événement « le véhicule est neuf » ;
- R l'événement « le véhicule est hybride rechargeable » ;
- $\overline{N}$ et $\overline{R}$ les événements contraires des événements contraires de N et R.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf et hybride rechargeable.

3. Démontrer que la valeur arrondie au dix-millième de la probabilité que ce véhicule soit hybride rechargeable est $0{,}0283$.

4. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable.

Partie B

Dans cette partie, on choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022. Dans la suite, on admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à $0{,}65$.
On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser la valeur de ses paramètres.

2. Déterminer la probabilité qu'exactement 325 de ces véhicules soient neufs.

3. Déterminer la probabilité $p(X \geq 325)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

On choisit désormais n véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022, où n désigne un entier naturel strictement positif.

On rappelle que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à $0{,}65$.

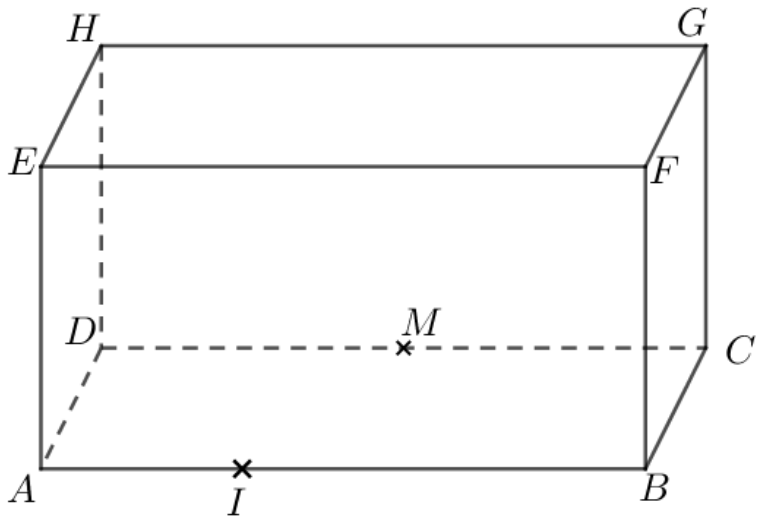
On assimile le choix de ces n véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

1. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n que tous ces véhicules soient d'occasion.

2. On note q_n la probabilité qu'au moins un de ces véhicules soit neuf. En résolvant une inéquation, déterminer la plus petite valeur de n telle que $q_n \geq 0{,}9999$.

Exercice 2 **(5 points)**

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 3$ et $AD = AE = 1$ représenté ci-dessous.



On considère le point I du segment $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ et on appelle M le milieu du segment $[CD]$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Sans justifier, donner les coordonnées des points F, H et M.

2. a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

   b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (HMF) est :

   $$2x + 6y + 3z - 9 = 0$$

   c) Le plan $\mathcal{P}$ dont une équation cartésienne est $5x + 15y - 3z + 7 = 0$ est-il parallèle au plan (HMF) ? Justifier la réponse.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DG).

4. On appelle N le point d'intersection de la droite (DG) avec le plan (HMF).
   Déterminer les coordonnées du point N.

5. Le point R de coordonnées $\left(3; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$ est-il le projeté orthogonal du point G sur le plan (HMF)? Justifier la réponse.

Exercice 3 **(6 points)**

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $g(x) = 2x - x^2$.

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0;1]$ et préciser les valeurs de $g(0)$ et de $g(1)$.

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1 et u_2.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < u_{n+1} < 1$.

4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

5. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(1 - u_n)$.

6. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et préciser son premier terme.

7. En déduire une expression de v_n en fonction de n.

8. En déduire une expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite déterminée à la question 5.

9. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci renvoie le rang `n` à partir duquel la suite dépasse $0{,}95$.

```
def seuil():
    n=0
    u=0.5
    while u<0.95:
        n=...
        u=...
    return n
```

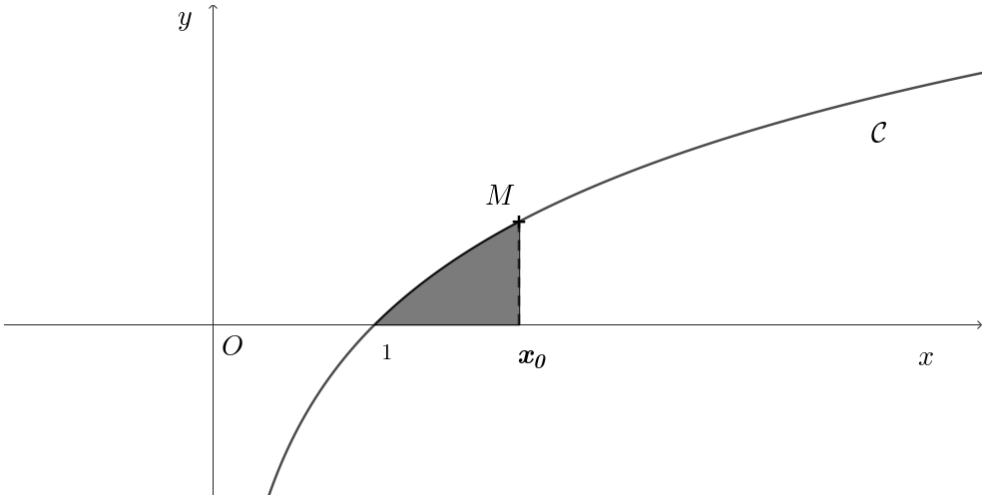
Exercice 4 **(4 points)**

Soit a un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = a\ln(x)$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

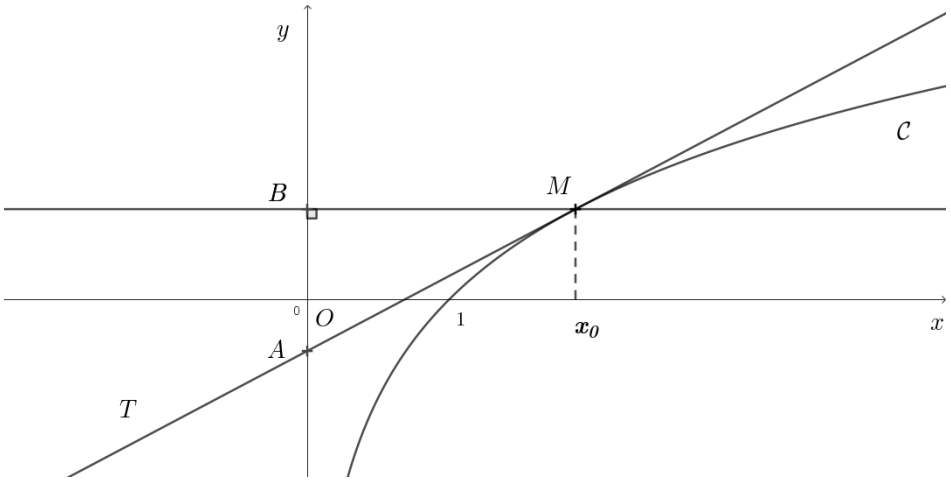
1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.

2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a(x\ln(x) - x)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

3. En déduire l'aire du domaine grisé en fonction de a et de x_0 .

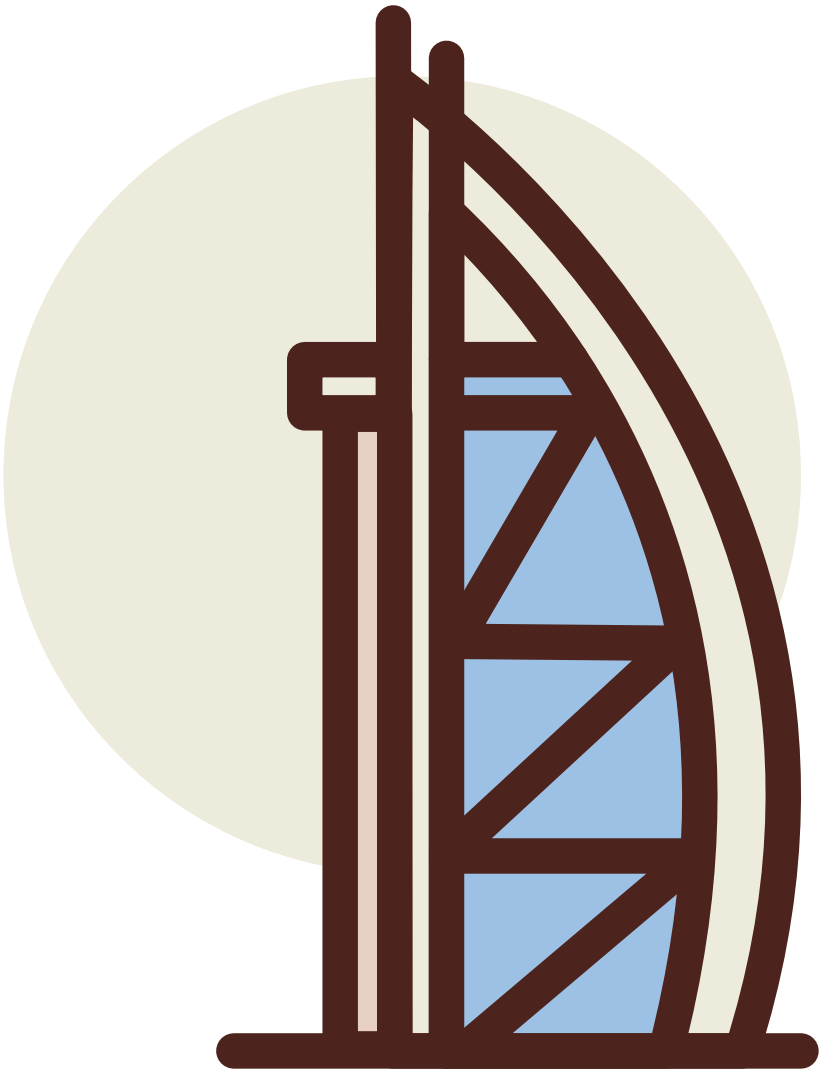


On note T la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point M d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera. *Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.*

57 Centres Étrangers - Jour 1 (24-MATJ1G11)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Partie A

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = \frac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03}$$

1. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$,

$$f'(x) = \frac{0{,}0288}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}$$

2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Partie B

La lutte contre le dopage passe notamment par la réalisation de contrôles antidopage qui visent à déterminer si un sportif a fait usage de substances interdites.
Lors d'une compétition rassemblant 1000 sportifs, une équipe médicale teste tous les concurrents. On propose d'étudier la fiabilité de ce test.

On appelle x le réel compris entre 0 et 1 qui désigne la proportion de sportifs dopés.

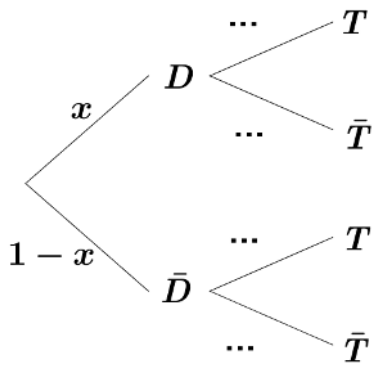
Lors de l'élaboration de ce test, on a pu déterminer que :

- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il est dopé est égale à $0{,}96$;
- la probabilité qu'un sportif soit déclaré positif sachant qu'il n'est pas dopé est égale à $0{,}03$.

On note :

- $\boldsymbol{D}$ l'événement : « le sportif est dopé ».
- $\boldsymbol{T}$ l'événement : « le test est positif ».

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. Déterminer, en fonction de x, la probabilité qu'un sportif soit dopé et ait un test positif.

3. Démontrer que la probabilité de l'événement $\boldsymbol{T}$ est égale à $0{,}93x + 0{,}03$.

4. Pour cette question uniquement, on suppose qu'il y a 50 sportifs dopés parmi les 1000 testés.
La fonction f désigne la fonction définie à la **partie A**.
Démontrer que la probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est égale à $f(0{,}05)$. En donner une valeur arrondie au centième.

5. On appelle valeur prédictive positive d'un test la probabilité que le sportif soit réellement dopé lorsque le résultat du test est positif.

a. Déterminer à partir de quelle valeur de x la valeur prédictive positive du test étudié sera supérieure ou égale à $0{,}9$. *Arrondir le résultat au centième.*

b. Un responsable de la compétition décide de ne plus tester l'ensemble des sportifs, mais de cibler les sportifs les plus performants supposés être plus fréquemment dopés.
Quelle est la conséquence de cette décision sur la valeur prédictive positive du test ? *Argumenter en utilisant un résultat de la* ***partie A****.*

Exercice 2 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;1]$.

1. a. Résoudre sur l'intervalle $[0;1]$ l'équation $f(x) = x$.

b. Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, $f'(x) = 2(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

c. Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n < u_{n+1} \leq 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. Démontrer que la limite de la suite (u_n) est $\ln(2)$.

4. a. Justifier que pour tout entier naturel n, $\ln(2) - u_n$ est positif.

b. On souhaite écrire un script Python qui renvoie une valeur approchée de $\ln(2)$ par défaut à 10^{-4} près, ainsi que le nombre d'étapes pour y parvenir.
Recopier et compléter le script ci-dessous afin qu'il réponde au problème posé.

```
def seuil():
    n=0
    u=0.1
    while ln(2) - u … 0.0001:
        n=n+1
        u=…
    return (u,n)
```

c. Donner la valeur de la variable `n` renvoyée par la fonction `seuil()`.

Exercice 3 (5 points)

.

On considère l'équation différentielle (E_0) : $y' = y$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.

2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.
On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».

5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.

7. Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x))\mathrm{d}x.$$

Exercice 4 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère :

- les points $A(-2;0;2)$, $B(-1\,;3;0)$, $C(1\,;-1;2)$ et $D(0;0;3)$.
- la droite $\mathcal{D}_1$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
- la droite $\mathcal{D}_2$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = -1 - 5s \\ z = 2 - 6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x + 3y + 5z - 8 = 0$$

c. En déduire que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3. a. Justifier que la droite $\mathcal{D}_1$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de D.

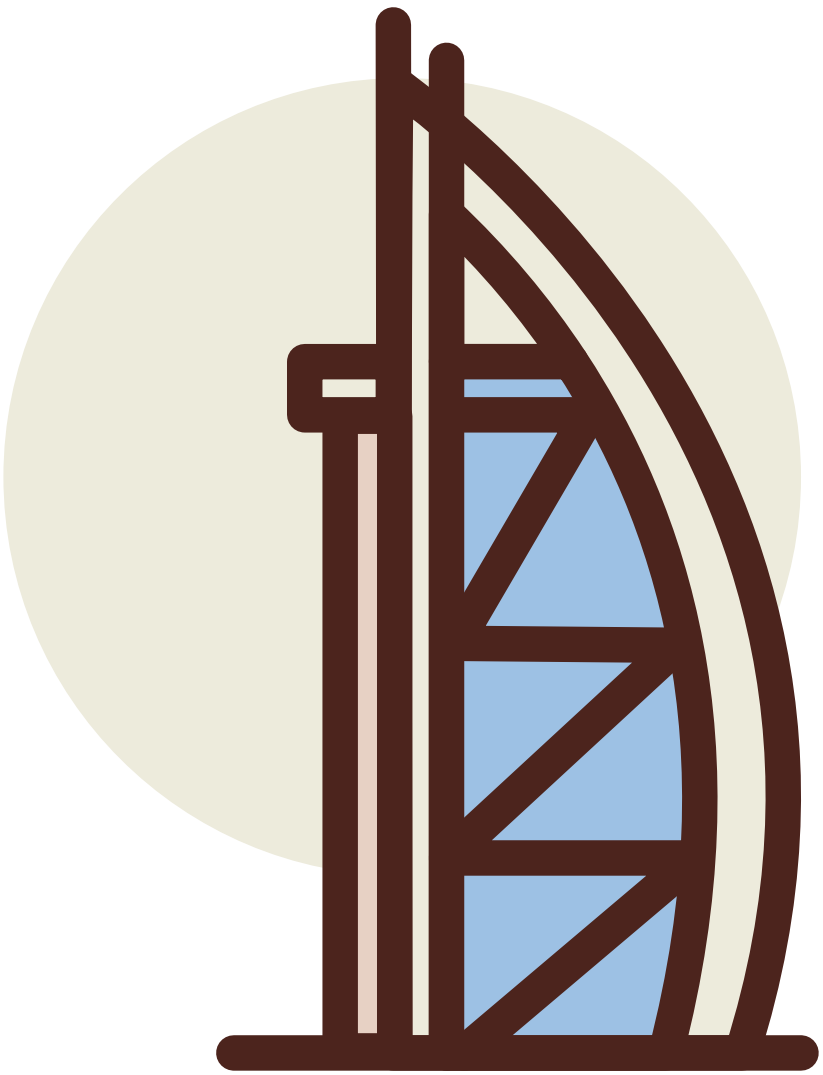
On admet que la droite $\mathcal{D}_2$ est la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de C.

b. Démontrer que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

4. a. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point D sur le plan (ABC).

b. Calculer la distance du point D au plan (ABC). *Arrondir le résultat au centième.*

58 Centres Étrangers - Jour 1 Secours (24-MATG11BIS)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice n°1 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 2y = -6x + 1$

La fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = e^{2x} - 6x + 1$ est une solution de l'équation différentielle (E).

Affirmation 2 : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par

$$u_n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

La suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

Affirmation 3 : On considère la suite (u_n) définie dans l'affirmation 2.

L'instruction `suite(50)` ci-dessous, écrite en langage Python, renvoie u_{50}.

```
def suite(k):
    S=0
    for i in range(k):
        S=S+(3/4)**k
    return S
```

Affirmation 4 : Soit a un réel et f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = a\ln(x) - 2x$$

Soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Il existe une valeur de a pour laquelle la tangente à C au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice n°2 (5 points)

Au cours d'une séance, un joueur de volley-ball s'entraîne à faire des services. La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,85.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le joueur réussit un service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant est égale à 0,6 ;
- si le joueur ne réussit pas un service, alors la probabilité qu'il ne réussisse pas le suivant est égale à 0,6.

Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

Partie A :

On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Démontrer que la probabilité de l'événement R_2 est égale à $0{,}57$.

3. Sachant que le joueur a réussi le deuxième service, calculer la probabilité qu'il ait raté le premier.

4. Soit *Z* la variable aléatoire égale au nombre de services réussis au cours des deux premiers services.
   a. Déterminer la loi de probabilité de *Z* (on pourra utiliser l'arbre pondéré de la question 1).
   b. Calculer l'espérance mathématique E(*Z*) de la variable aléatoire *Z*. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B :

On s'intéresse maintenant au cas général.
Pour tout entier naturel n non nul, on note x_n la probabilité de l'évènement R_n.

1.
   a. Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}})$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $x_{n+1} = 0{,}2x_n + 0{,}4$

2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = x_n - 0{,}5$

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
   b. Déterminer l'expression de x_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (x_n).
   c. Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

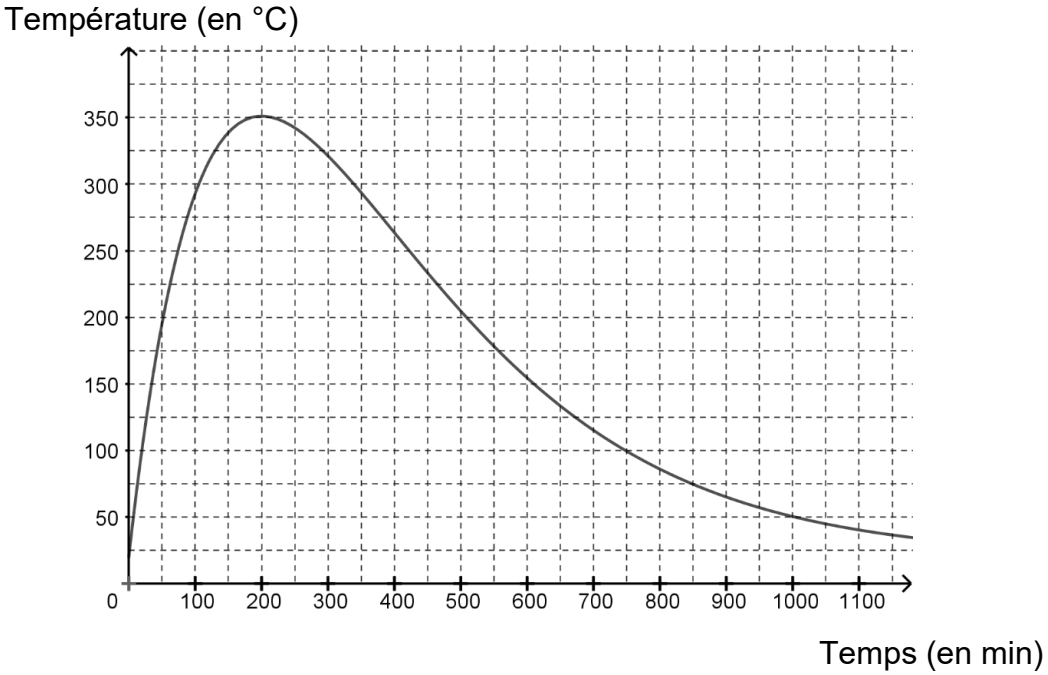
Exercice n°3 (7 points)

Un organisme certificateur est missionné pour évaluer deux appareils de chauffage, l'un d'une marque A et l'autre d'une marque B.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : appareil de la marque A

À l'aide d'une sonde, on a mesuré la température à l'intérieur du foyer d'un appareil de la marque A.
On a représenté, ci-dessous, la courbe de la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer en fonction du temps écoulé, exprimé en minutes, depuis l'allumage du foyer.



Par lecture graphique :

1. Donner le temps au bout duquel la température maximale est atteinte à l'intérieur du foyer.

2. Donner une valeur approchée, en minutes, de la durée pendant laquelle la température à l'intérieur du foyer dépasse $300°C$.

3. On note f la fonction représentée sur le graphique.

   Estimer la valeur de $\frac{1}{600}\int_0^{600} f(t)dt$. Interpréter le résultat.

<u>Partie 2</u> : étude d'une fonction

Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = 10te^{-0,01t} + 20$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que pour tout $t \in [\,0\,;\,+\infty\,[\,,\, g'(t) = (-0,1t + 10)e^{-0,01t}$

b. Étudier les variations de la fonction g sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$ et construire son tableau de variations.

3. Démontrer que l'équation $g(t) = 300$ admet exactement deux solutions distinctes sur $[\,0\,;\,+\infty\,[$. En donner des valeurs approchées à l'unité.

4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^{600} g(t)dt$.

<u>Partie 3</u> : évaluation

Pour un appareil de la marque B, la température en degrés Celsius à l'intérieur du foyer t minutes après l'allumage est modélisée sur $[0; 600]$ par la fonction g.

L'organisme certificateur attribue une étoile par critère validé parmi les quatre suivants :

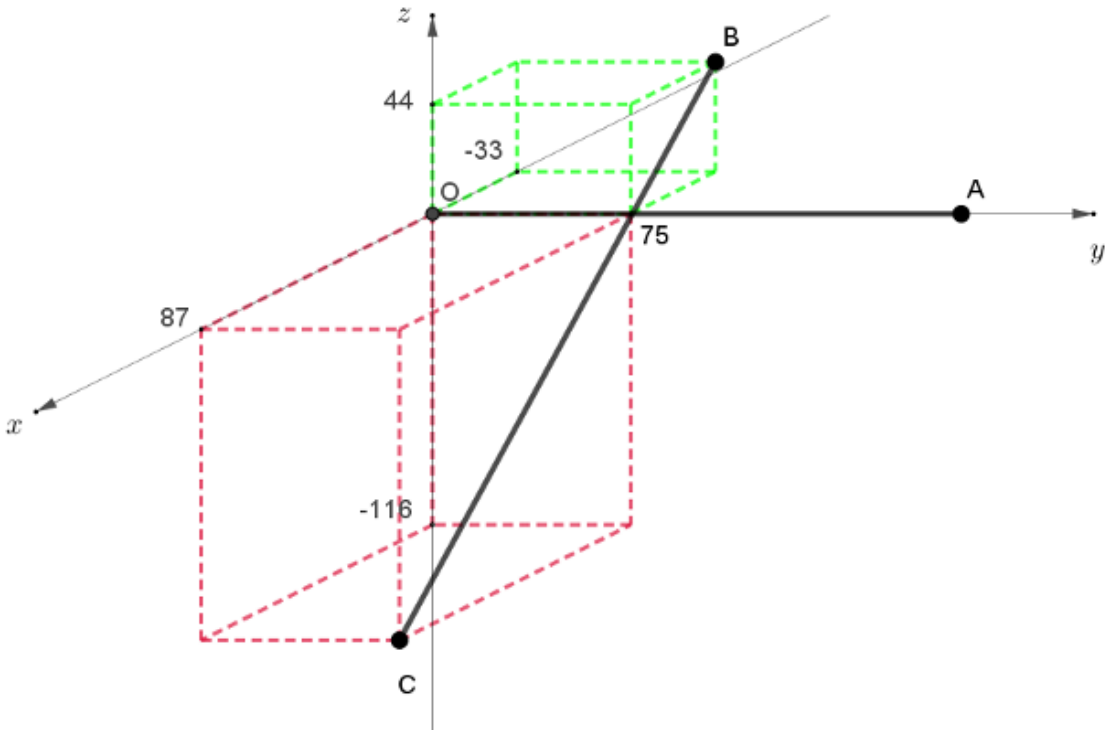
- Critère 1 : la température maximale est supérieure à 320°C.
- Critère 2 : la température maximale est atteinte en moins de 2 heures.
- Critère 3 : la température moyenne durant les 10 premières heures après l'allumage dépasse 250 °C.
- Critère 4 : la température à l'intérieur du foyer ne doit pas dépasser 300°C pendant plus de 5 heures.

Chaque appareil obtient-il exactement trois étoiles ? Justifier votre réponse.

Exercice n°4 (4 points)

On modélise un passage de spectacle de voltige aérienne en duo de la manière suivante :

- on se place dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, une unité représentant un mètre ;
- l'avion n°1 doit relier le point O au point $\mathrm{A}(0;200;0)$ selon une trajectoire rectiligne, à la vitesse constante de $200\ \mathrm{m/s}$;
- l'avion n°2 doit, quant à lui, relier le point $\mathrm{B}(-33;75;44)$ au point $\mathrm{C}(87;75;-116)$ également selon une trajectoire rectiligne, et à la vitesse constante de $200\ \mathrm{m/s}$.
- au même instant, l'avion n°1 est au point O et l'avion n°2 est au point B.

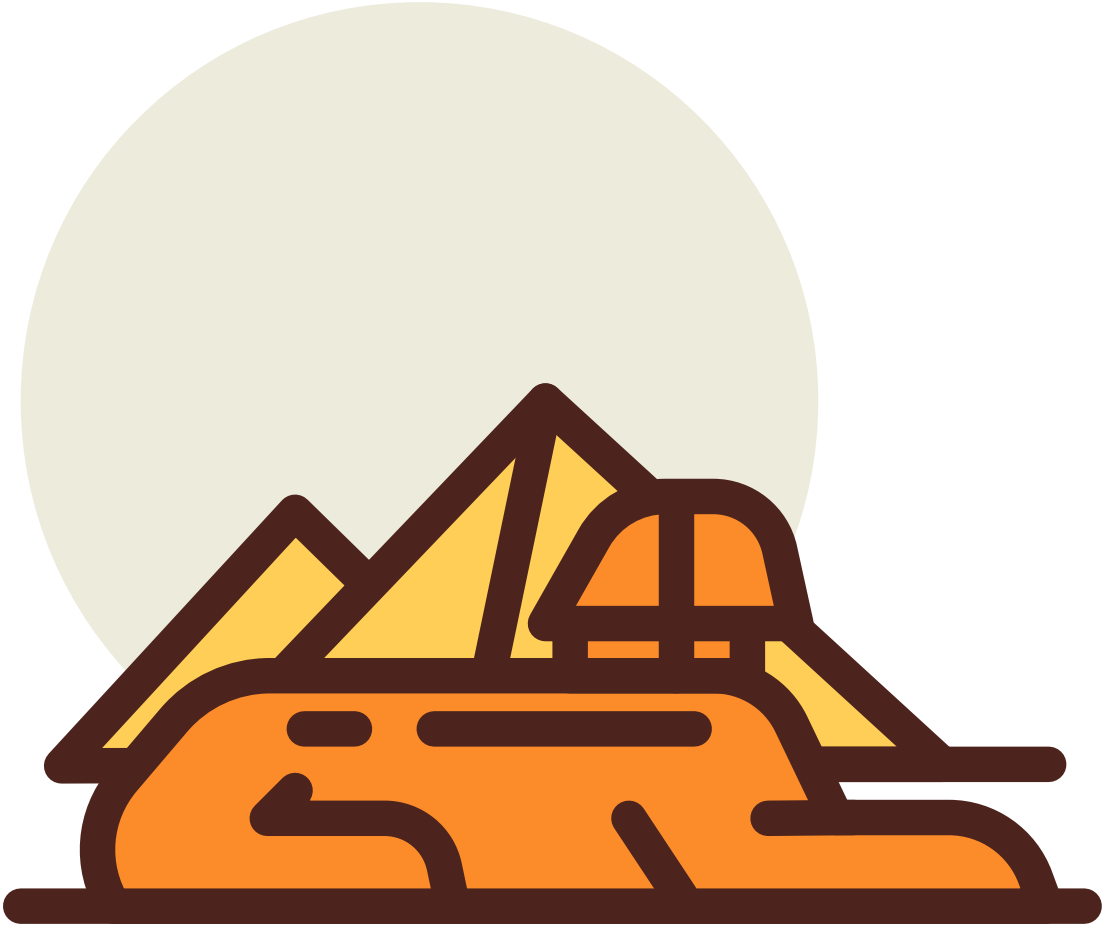


1. Justifier que l'avion n°2 mettra autant de temps à parcourir le segment [BC] que l'avion n°1 à parcourir le segment [OA].

2. Montrer que les trajectoires des deux avions se coupent.

3. Les deux avions risquent-ils de se percuter lors de ce passage ?

59 Centres Étrangers - Jour 2 (24-MATJ2G11)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.
À trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.
Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.
Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est $(4\ ;\ 5\ ;\ 1)$.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.

2. a. Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
b. En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché.
Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1.

4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_1.

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S.

6. Déterminer $P(S = 24)$.

7. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
a. Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
b. En déduire la probabilité de gagner un lot.

Exercice 2 **(6 points)**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty; 1[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 1.

b. En déduire une interprétation graphique.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, on a $f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$.

b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, on a $f''(x) = \frac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}$.

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

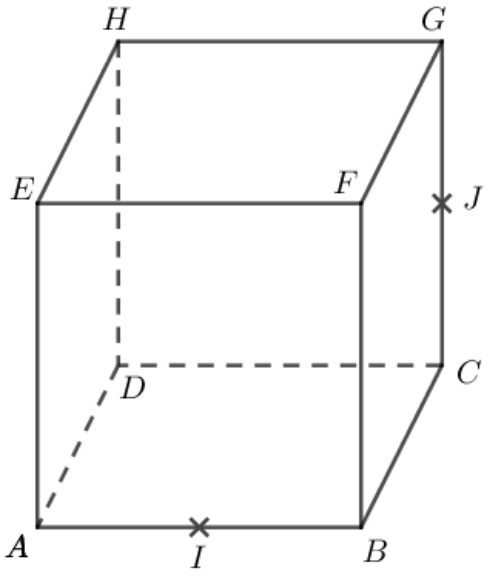
c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty; 1[$, on a : $e^x \geq (-2x-1)(x-1)$.

5. **a.** Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 3 **(5 points)**

Le cube $ABCDEFGH$ a pour arête 1 cm.
Le point I est le milieu du segment $[AB]$ et le point J est le milieu du segment $[CG]$.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ est normal au plan (FHI).

3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (FHI) est $-2x-2y+z+1=0$.

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EJ).

5. **a.** On note K le projeté orthogonal du point E sur le plan (FHI).
Calculer ses coordonnées.

b. Montrer que le volume de la pyramide $EFHI$ est $\frac{1}{6}$ cm³.

On pourra utiliser le point L, milieu du segment $[EF]$. On admet que ce point est le projeté orthogonal du point I sur le plan (EFH).

c. Déduire des deux questions précédentes l'aire du triangle FHI.

Exercice 4 (4 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+1}$.
On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$f(x)-x=\frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0;+\infty[$ l'équation $f(x)=x$ admet pour unique solution :

$$\ell=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $1\leq u_{n+1}\leq u_n$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. On considère le script Python ci-dessous :

```
1  from math import *
2  def seuil(n):
3      u=5
4      i=0
5      ℓ=(1+sqrt(5))/2
6      while abs(u-ℓ)>=10**(-n):
7          u=sqrt(u+1)
8          i=i+1
9      return(i)
```

On rappelle que la commande **abs**(x) *renvoie la valeur absolue de* x.

a. Donner la valeur renvoyée par `seuil(2)`.
b. La valeur renvoyée par `seuil(4)` est 9.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

60 Asie - Jour 1 (24-MATJ1JA1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour J1

Durée de l'épreuve : **4 heures**
Coefficient : 16

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

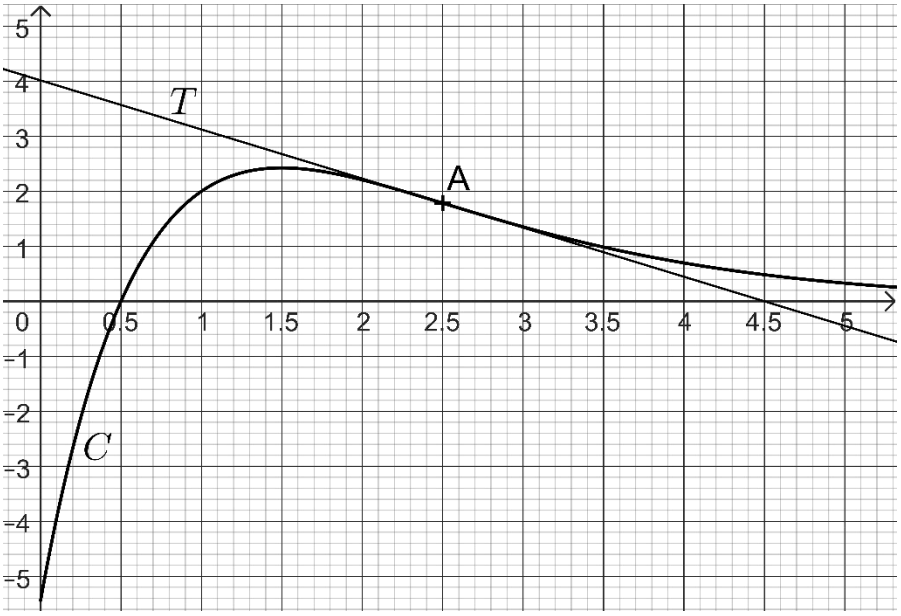
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Tous les exercices doivent être traités.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidates et les candidats sont invités à faire figurer sur leurs copies toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse.

Exercice 1 (5 points)

Partie A

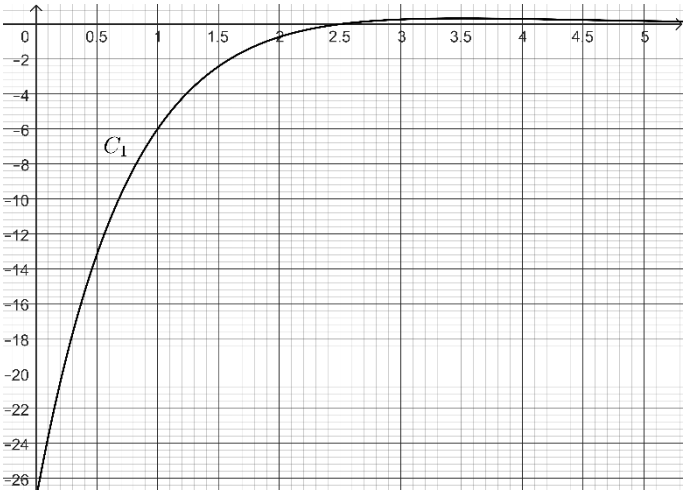
On considère une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$, représentée par la courbe C ci-dessous. La droite T est tangente à la courbe C au point A d'abscisse $\frac{5}{2}$.



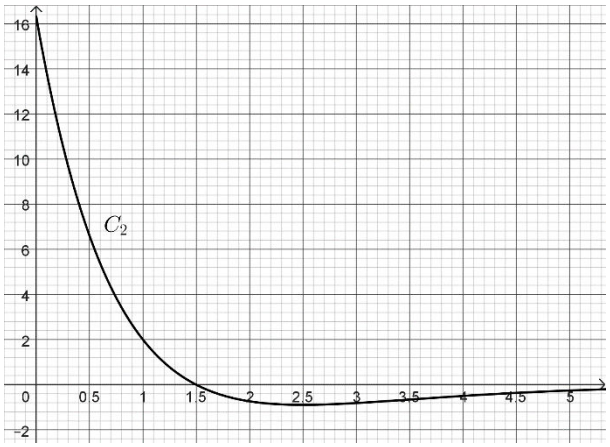
1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;5]$.

2. Que semble présenter la courbe C au point A ?

3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.
Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente. Ce choix sera justifié.

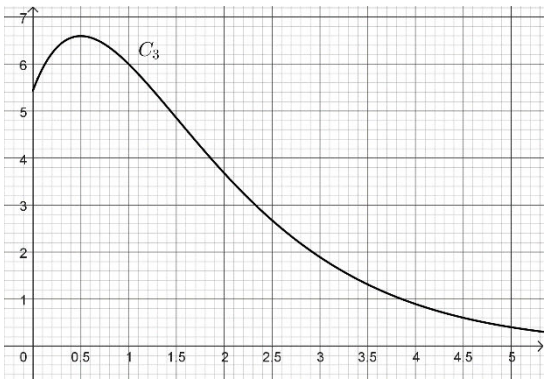


Courbe C_1



Courbe C_2

4. La courbe C_3 ci-contre peut-elle être la représentation graphique sur $[0\,;+\infty[$, d'une primitive de la fonction f ? Justifier.



Partie B

Dans cette partie, on considère que la fonction f, définie et deux fois dérivable sur $[0\,;+\infty[$, est définie par $f(x) = (4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$.

On notera respectivement f' et f'' la dérivée et la dérivée seconde de la fonction f.

1. Étude de la fonction f

a. Montrer que $f'(x) = (-4x+6)\mathrm{e}^{-x+1}$.

b. Utiliser ce résultat pour déterminer le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. Étudier la convexité de la fonction f et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de f.

2. On considère une fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x+1}$, où a et b sont deux nombres réels.

a. Déterminer les valeurs des réels a et b telles que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $[0;+\infty[$.

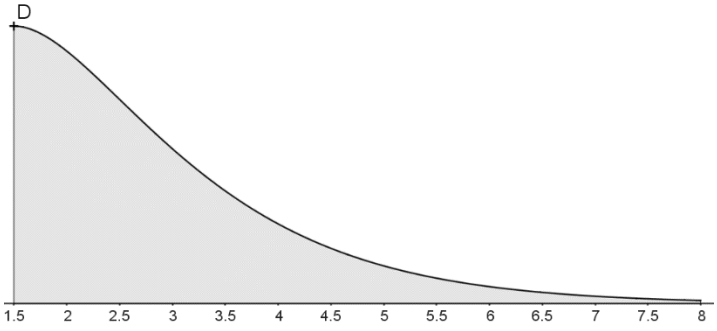
b. On admet que $F(x) = (-4x-2)\mathrm{e}^{-x+1}$ est une primitive de la fonction f sur $[0;+\infty[$. En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'intégrale

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Une municipalité a décidé de construire une piste de trottinette freestyle.

Le profil de cette piste est donné par la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2};\ 8\right]$.

L'unité de longueur est le mètre.



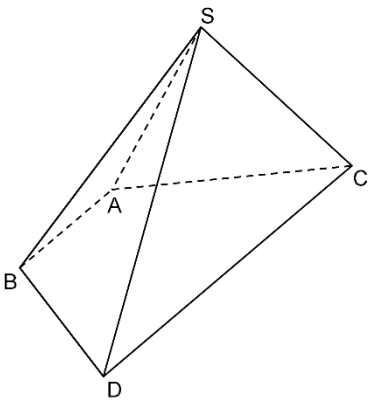
a. Donner une valeur approchée au cm près de la hauteur du point de départ D.

b. La municipalité a organisé un concours de graffiti pour orner le mur de profil de la piste. L'artiste retenue prévoit de couvrir environ 75% de la surface du mur. Sachant qu'une bombe aérosol de 150 mL permet de couvrir une surface de 0,8 m², déterminer le nombre de bombes qu'elle devra utiliser pour réaliser cette œuvre.

Exercice 2 (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ d'unité 1 cm,

on considère les points : A(3 ; -1 ; 1) ; B(4 ; -1 ; 0) ;
C(0 ; 3 ; 2) ; D(4 ; 3 ; -2) et S(2 ; 1 ; 4).



Dans cet exercice on souhaite montrer que SABDC est une pyramide à base ABDC trapézoïdale de sommet S, afin de calculer son volume.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2.

a. Montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

b. Montrer que le quadrilatère ABDC est un trapèze de bases [AB] et [CD].

On rappelle qu'un trapèze est un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles appelés bases.

3.

a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ (2 ; 1 ; 2) est un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point S et orthogonale au plan (ABC).

d. On note I le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC). Montrer que le point I a pour coordonnées I $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{8}{3}\right)$, puis montrer que SI = 2 cm.

4.

a. Vérifier que le projeté orthogonal H du point B sur la droite (CD) a pour coordonnées H (3 ; 3 ; -1) et montrer que HB = $3\sqrt{2}$ cm.

b. Calculer la valeur exacte de l'aire du trapèze ABDC.

On rappelle que l'aire d'un trapèze est donnée par la formule

$$\mathcal{A} = \frac{b + B}{2} \times h$$

où b et B sont les longueurs des bases du trapèze et h sa hauteur.

5. Déterminer le volume de la pyramide SABDC.

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'une pyramide est donné par la formule

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times aire\ de\ la\ base \times hauteur$$

Exercice 3 (5 points)

Dans la revue Lancet Public Health, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7% des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.

Source : https://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667(21)00064-5/fulltext

On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

Partie A

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.

On note I l'événement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »

Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?

2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.

On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.

a. Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b. Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

c. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon? On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

d. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ? On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

e. Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leq n) > 0{,}9$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B :

Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection), si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19.

Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID 19.

Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa sensibilité et sa spécificité.

La sensibilité d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai positif).

La spécificité d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai négatif).

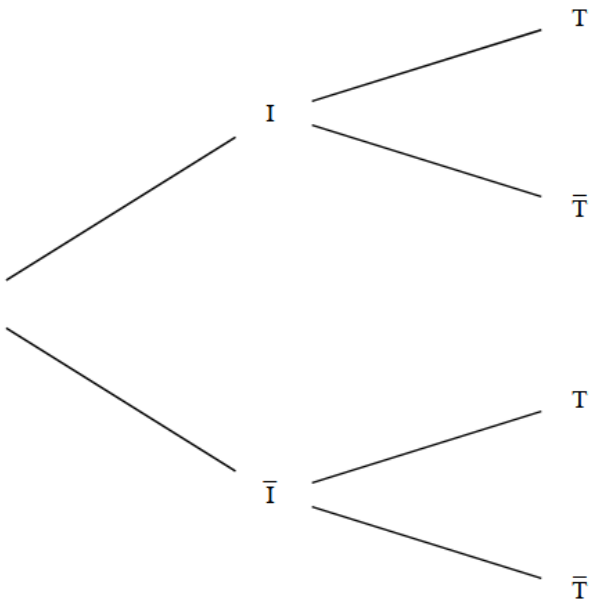
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :

- Sa sensibilité est de 0,8.
- Sa spécificité est de 0,99.

On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020.

On note T l'événement « le test réalisé est positif ».

1. Compléter l'arbre des probabilités ci-dessous avec les données de l'énoncé :



2. Montrer que $P(\text{T}) = 0{,}05503$.

3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif ? On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

Partie C :

On considère un groupe d'une population d'un autre pays soumis au même test de sensibilité 0,8 et de spécificité 0,99.

Dans ce groupe la proportion d'individus ayant un test positif est de 29,44%.

On choisit au hasard un individu de ce groupe ; quelle est la probabilité qu'il ait été infecté ?

Exercice 4 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. Affirmation 1 : Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.

2. On considère une suite (u_n) définie sur **N** telle que, pour tout entier n, on a $u_n \leq \frac{-9^n+3^n}{7^n}$.

Affirmation 2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

3. On considère la fonction suivante écrite en langage Python :

```
def terme(N):
    U=1
    for i in range(N):
        U=U+i
    return U
```

Affirmation 3 : terme(4) renvoie la valeur 7.

4. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :

- Prix A : il reçoit 1 000 euros par jour pendant 15 jours ;

- Prix B : il reçoit 1 euro le 1er jour, 2 euros le 2e jour, 4 euros le 3e jour et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.

Affirmation 4 : La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $v_n = \int_1^n \ln x \, dx$.

Affirmation 5 : La suite (v_n) est croissante.

61 Asie - Jour 2 (24-MATJ2JA1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour J2

Durée de l'épreuve : **4 heures**
Coefficient : 16

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Tous les exercices doivent être traités.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidates et les candidats sont invités à faire figurer sur leurs copies toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse.

Exercice 1 (5,5 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - x\ln(x)$.

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.

3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0\,;+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0\,;+\infty[$.
On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0\,;+\infty[$.
Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g. Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.

Résoudre, sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n\ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

2. Justifier que la suite (u_n) converge.

On appelle l la limite de la suite (u_n) et on admet que l vérifie l'égalité $f(l) = l$.

3. Déterminer la valeur de l.

Exercice 2 **(5,5 points)**

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.

Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70% des cas.

Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.

De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.

On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

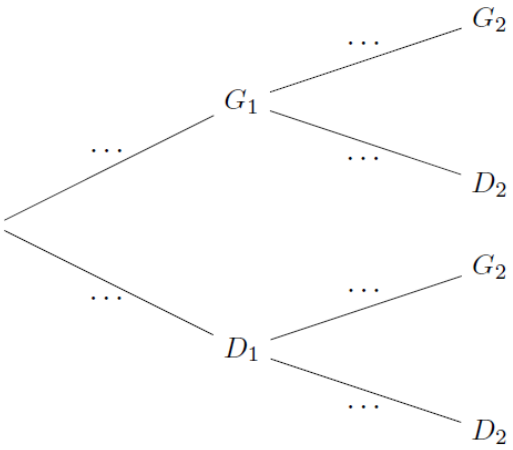
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les événements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'événement G_n. On a donc $g_1 = 0{,}5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $P_{G_1}(D_2)$?

2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :

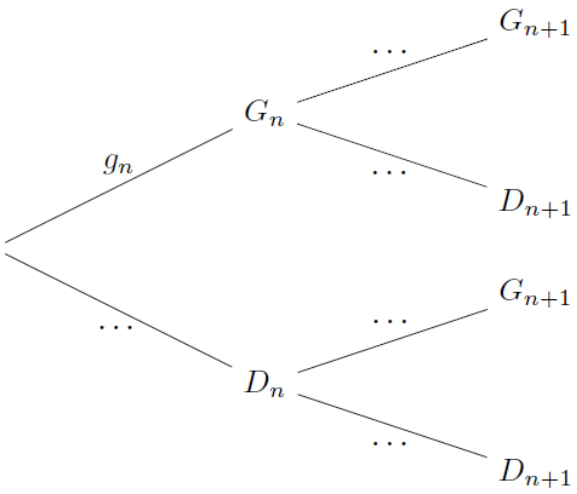


3. Calculer g_2.

4. Soit n un entier naturel non nul.

a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.

b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $g_{n+1} = 0{,}5g_n + 0{,}2$.



5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0{,}4$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4$.

6. Étudier les variations de la suite (g_n).

7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n).

Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0{,}4 \leq 0{,}001$.

9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0{,}4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1  def seuil(e):
2      g=0.5
3      n=1
4      while...:
5          g=0.5g+0.2
6          n=...
7      return (n)
```

Exercice 3 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

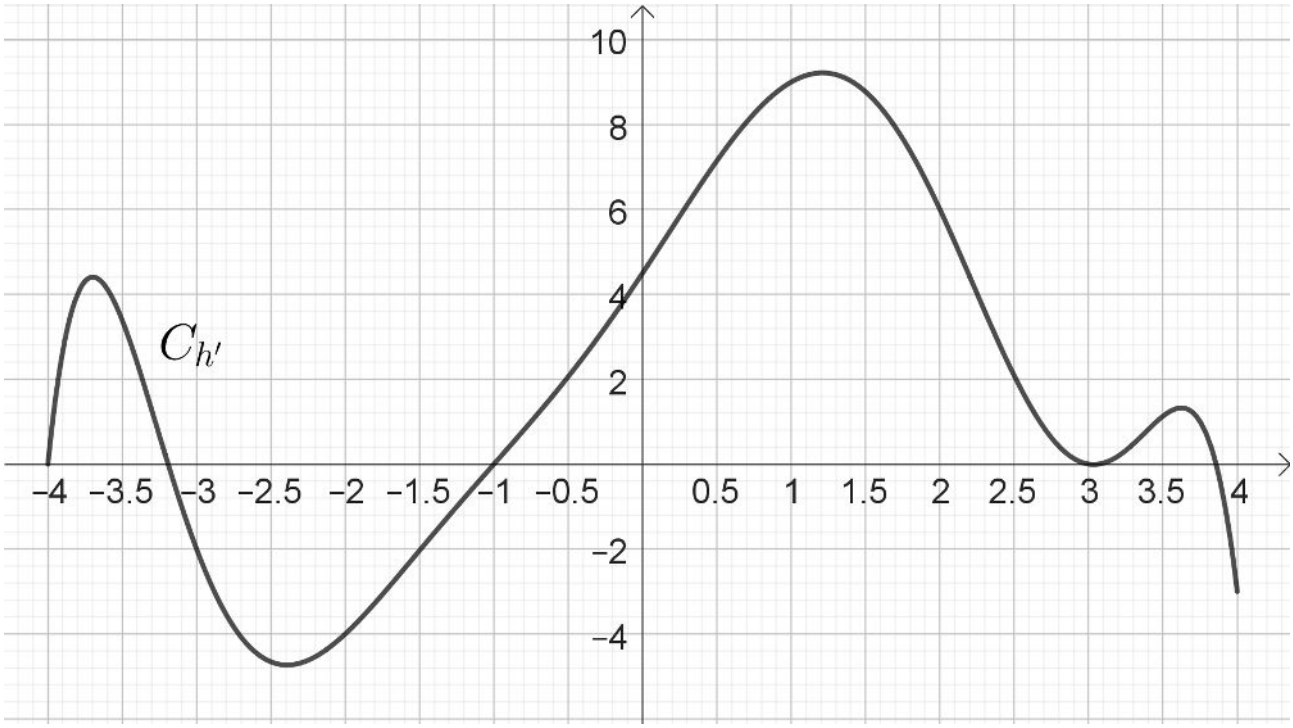
1. Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n et vérifiant la relation suivante :

pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} < u_n \leq \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}$.

Affirmation 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

2. Soit h une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4; 4]$.

La représentation graphique $C_{h'}$ de sa fonction dérivée h' est donnée ci-dessous.



Affirmation 2 : La fonction h est convexe sur $[-1; 3]$.

3. Le code d'un immeuble est composé de 4 chiffres (qui peuvent être identiques) suivis de deux lettres distinctes parmi A, B et C (exemple : 1232BA).

Affirmation 3 : Il existe 20 634 codes qui contiennent au moins un 0.

4. On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x$.

Affirmation 4 : La fonction f est une solution sur $]0; +\infty[$ de l'équation différentielle

$$xy' - y = x.$$

Exercice 4 (5 points)

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace, on considère le plan (P) d'équation :

$$(P) : 2x + 2y - 3z + 1 = 0$$

On considère les trois points A, B et C de coordonnées :

A(1 ; 0 ; 1) , B(2 ; -1 ; 1) et C(-4 ; -6 ; 5) .

Le but de cet exercice est d'étudier le rapport des aires entre un triangle et son projeté orthogonal dans un plan.

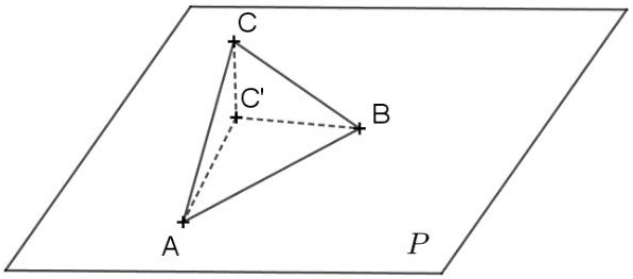
Partie A

1. Pour chacun des points A, B et C, vérifier s'il appartient au plan (P).

2. Montrer que le point C'(0 ; -2 ; -1) est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

4. On admet l'existence d'un unique point H vérifiant les deux conditions
$\begin{cases} H \in (AB) \\ (AB) \text{ et } (HC) \text{ sont orthogonales.} \end{cases}$
Déterminer les coordonnées du point H.



Partie B

On admet que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HC}$ sont : $\overrightarrow{HC}\begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\left\|\overrightarrow{HC}\right\|$.

2. Soit S l'aire du triangle ABC. Déterminer la valeur exacte de S.

Partie C

On admet que $HC' = \sqrt{\frac{17}{2}}$.

1. Soit $\alpha = \widehat{CHC'}$. Déterminer la valeur de $\cos(\alpha)$.

2.

a. Montrer que les droites (C'H) et (AB) sont perpendiculaires.

b. Calculer S' l'aire du triangle ABC', on donnera la valeur exacte.

c. Donner une relation entre S, S' et $\cos(\alpha)$.

62 Métropole - Jour 1 (24-MATJ1ME1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Mercredi 19 juin 2024

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}$.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Affirmation 1 :
L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe C_f.

Affirmation 2 :
La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' + y = 5\mathrm{e}^{-x}$.

2. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n), telles que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.

Affirmation 3 :
La suite (v_n) converge vers un nombre réel l appartenant à l'intervalle $[-1; 1]$.

On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.
Affirmation 4 :
Pour tout entier naturel n, on a alors : $u_0 \leq v_n \leq w_0$.

Exercice 2 (5 points)

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60 % des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30 % des ventes et ceux en grandes surfaces 10 % des ventes.

Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- 75 % pour les clients sur internet ;
- 90 % pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80 % pour les clients en grande surface.

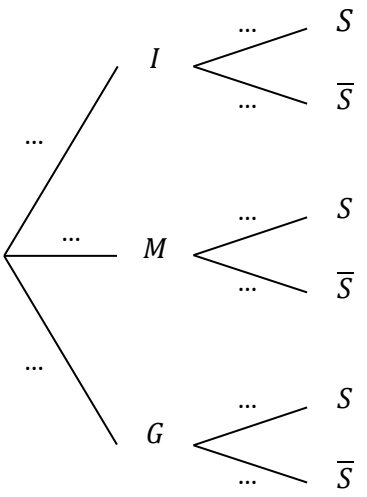
On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.

On définit les événements suivants :

- I : « le client a effectué son achat sur internet » ;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un événement quelconque, on notera $\bar{A}$ son événement contraire et $P(A)$ sa probabilité.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.



2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.

3. Démontrer que $P(S) = 0{,}8$.

4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ? On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.

5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.

7. Dans les deux questions **a.** et **b.** qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.
Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2.

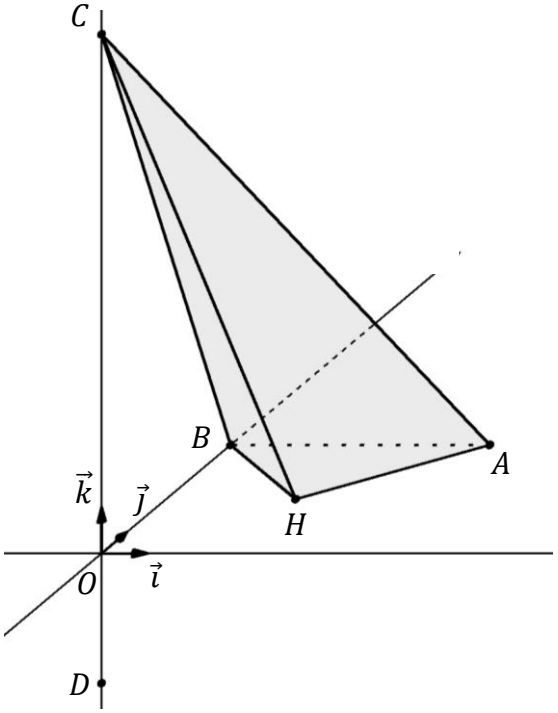
La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution.
La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :
- L'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;
- L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.

a. Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.

b. Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

Exercice 3 (5 points)



L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$.

On considère les points $A\,(5\,;\,5\,;\,0)$, $B\,(0\,;\,5\,;\,0\,)$, $C\,(0\,;\,0\,;\,10)$ et $D\left(0\,;\,0\,;\,-\frac{5}{2}\right)$.

1.

a. Montrer que $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x-y=0$.

2. On considère la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases}x=\frac{5}{2}t\\y=5-\frac{5}{2}t\\z=0\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.

a. On admet que la droite $\mathcal{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right)$.

b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

3.

a. Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.

b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.

4.

a. Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C.

b. En déduire le volume du tétraèdre $ABCH$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V=\frac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).

Exercice 4 (6 points)

Partie A : étude de la fonction f.

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1.

a. Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.

c. Étudier le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

d. Étudier la convexité de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

2.

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0;+\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1\,;2]$.

b. Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$.

c. Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g.

La fonction g est définie sur $]0\,;1]$ par $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0\,;1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

2.

a. Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

b. On admet le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$		$+$	0	$-$	

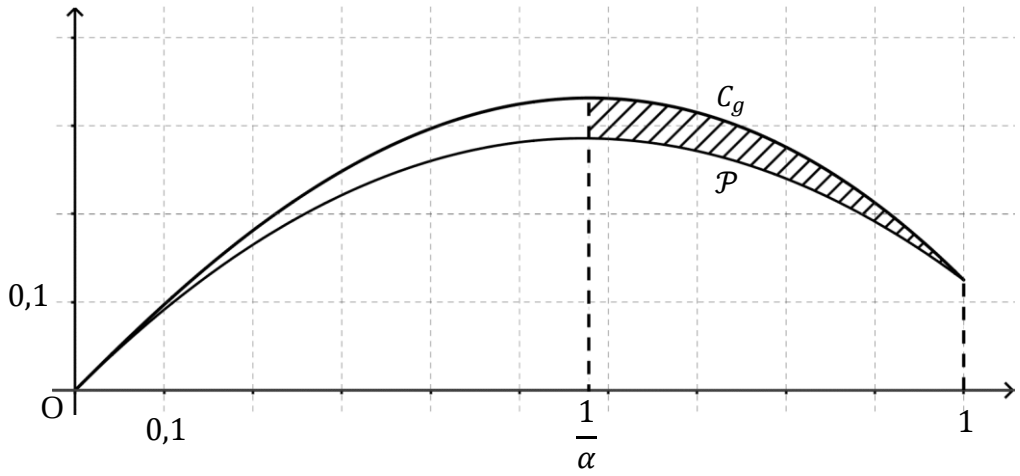
En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0\,;1]$.
Les images et les limites ne sont pas demandées.

Tourner la page.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe C_g de la fonction g ;
- La parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0\,;1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes C_g et $\mathcal{P}$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.
On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

1.

a. Justifier la position relative des courbes C_g et $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $]0\,;1]$.

b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \; dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} \; .$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathcal{A}$.

63 Métropole - Jour 1 Secours (24-MATJ1ME2)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

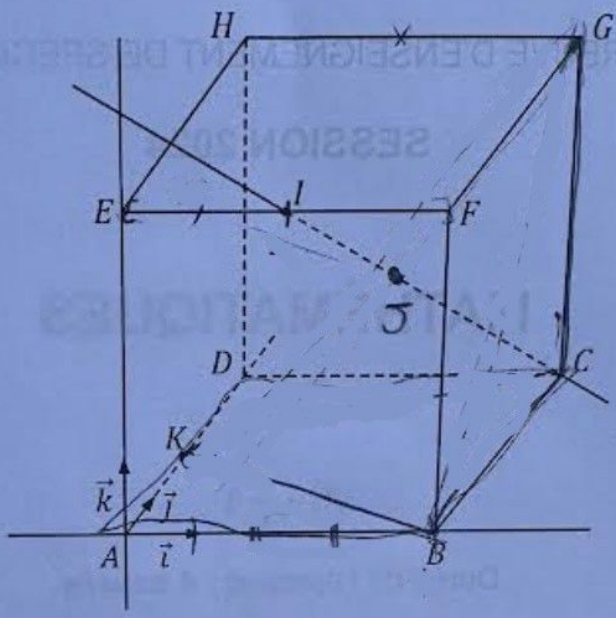
Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

On considère le repère orthonormé $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace dans lequel on place les points $B(4\,;0\,;0), D(0\,;4\,;0), E(0\,;0\,;4)$ et les points C, F, G et H de sorte que le solide $ABCDEFGH$ soit un cube.



1. Donner les coordonnées des points C, F, G et H.
2. On considère le point I milieu de l'arête $[EF]$.
   Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est donnée par :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par P le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de P avec (IC).
   a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan P est donnée par :
   $$x + 2y - 2z - 4 = 0.$$
   b. Justifier que J a pour coordonnées $\left(\frac{28}{9}\,;\frac{20}{9}\,;\frac{16}{9}\right)$. Que représente J par rapport à C ?
   c. Vérifier que le point $K(0\,;2\,;0)$ appartient au plan P.
   d. Justifier que (BK) est l'intersection des plans P et (ABC).
4. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{\mathcal{B}\times h}{3}$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
   a. Déterminer le volume de la pyramide $CBKG$.
   b. En déduire que l'aire du triangle BKG est égale à 12.
5. Justifier que la droite (BG) est incluse dans P.
6. On note I' un point de l'arête $[EF]$, et P' le plan orthogonal à la droite $(I'C)$ passant par G.
   Peut-on affirmer que la droite (BG) est incluse dans P' ?

Exercice 2 (4 points)

Partie A

Suite à une étude statistique réalisée dans la station-service Carbuplus, on évalue à 0,25 la probabilité qu'un client venant alimenter son véhicule en carburant passe moins de 12 minutes dans la station avant de la quitter.
On choisit au hasard et de façon indépendante 10 clients de la station et on assimile ce choix à un tirage avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 10 clients associe le nombre de ces clients ayant passé moins de 12 minutes à la station.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins 4 clients dans un échantillon de 10 passent moins de 12 minutes à la station ? On arrondira si besoin le résultat à 10^{-3} près.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Un client arrive à la station et se dirige vers une pompe. Il constate que deux voitures sont devant lui, la première accédant à la pompe au moment de son arrivée.
On désigne par T_1, T_2, T_3 les variables aléatoires qui modélisent les temps passés en minute par chacun des trois clients, dans leur ordre d'arrivée, pour alimenter son véhicule entre l'instant où la pompe est disponible pour lui et celui où il la libère.

On suppose que T_1, T_2, T_3 sont des variables aléatoires indépendantes de même espérance égale à 6 et de même variance égale à 1.

On note S la variable aléatoire correspondant au temps d'attente total passé à la station du troisième client entre son arrivée à la station et son départ de la pompe après avoir alimenté son véhicule.

1. Exprimer S en fonction de T_1, T_2 et T_3.
2. a. Déterminer l'espérance de S et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   b. Quelle est la variance du temps d'attente total S de ce troisième client ?
3. Montrer que la probabilité que le troisième client passe un temps strictement compris entre 14 et 22 minutes à la station est supérieure ou égale à 0,81.

Tourner la page

Exercice 3 (6 points)

Partie A : étude d'une fonction.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   a. Montrer que pour tout nombre réel x, on a :
   $$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout nombre réel $x > 0$, on a :
   $$f(x) = x - 2\ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$
3. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B : étude d'une suite.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \ln(u_n^2 + 1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :
   $$u_n \geq 0.$$
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire la convergence de la suite (u_n).
4. On note l la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de l.
5.
   a. Recopier et compléter le script ci-dessous écrit en langage Python afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $u_n \leq h$, où h est un nombre réel strictement positif.

```
from math import log as ln
#permet d'utiliser la function ln :
#le logarithme népérien

def seuil(h):
    n=0
    u=7
    while ... :
        n = n + 1
        u = ...
    return n
```

   b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit `seuil(0.01)` dans la console Python. Justifier la réponse.

1. Étudier le signe de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
2. Interpréter graphiquement l'intégrale :

$$I = \int_2^4 f(x)dx\,.$$

3. On admet dans cette question que, pour tout nombre réel $x \in [2\,;4]$, on a l'encadrement :

$$0{,}5x - 1 \leq f(x) \leq 0{,}25x + 0{,}25\,.$$

En déduire l'encadrement :

$$1 \leq I \leq 2\,.$$

Exercice 4 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
f	5	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	3	↘	1

   a. **Affirmation 1 :**
   La droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe C_f de la fonction f.

   b. **Affirmation 2 :**

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{f(x)-5} = +\infty\,.$$

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{-x}$.
   a. **Affirmation 3 :**
   Le point $A\left(2\,;\frac{2}{e^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe C_g de la fonction g.

   b. **Affirmation 4 :**
   Pour tout nombre réel x appartenant à $]-\infty\,;2[$, on a : $g(x) \leq x$.

3. **Affirmation 5 :**
   L'équation $x \ln x = 1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

64 Métropole - Jour 2 (24-MATJ2ME1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jeudi 20 juin 2024

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

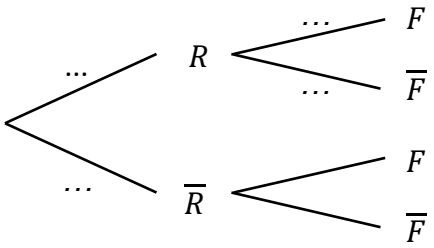
Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans. Elle constate que 60% de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47% ont acheté la carte de fidélité.
Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.
On interroge au hasard un client et on considère les événements suivants :

- R: « le client est un client régulier » ;
- F: « le client a acheté la carte de fidélité ».

Pour un événement E quelconque, on note $\overline{E}$ son événement contraire et $P(E)$ sa probabilité.

1.

a. Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.



b. Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.

c. Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.

d. Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers. Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.

2. On choisit un échantillon de 20 clients de la société sélectionnés de manière indépendante. On suppose que ce choix s'assimile à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 20 clients associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux. On rappelle que $P(F) = 0{,}38$.

Les valeurs des probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.

a. Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire X ? Justifier.

b. Déterminer la probabilité qu'au moins 5 clients aient acheté la carte de fidélité dans un échantillon de 20.

Partie B

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.
On choisit au hasard un échantillon de 1000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1000 clients répondent.

- Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon. Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.
- La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1000 clients. On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30 000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 100 000.

On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.
On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1000 et 0,47 et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.
On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{Y}{1000}$.

2. Préciser ce que modélise la variable Z dans le contexte de l'exercice. Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à 53,5 et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0,72275.

3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre 51,7 euros et 55,3 euros est supérieure à 0,75.

Exercice 2 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(0; 4; -1)$, $B(6; 1; 5)$ et $C(6; -2; -1)$. On admet que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation 1 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point C et orthogonal à la droite (AB) est $2x + 2y - z - 9 = 0$.

On considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ dont on donne ci-dessous une représentation paramétrique :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R} ; \qquad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 2t' \\ y = 4 - t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 4 : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Exercice 3 (5 points)

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = {u_n}^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a.

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$.

1.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$.

2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.

a. En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n < 2.$$

b. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$.

1. On donne ci-contre la fonction u écrite en langage Python.

Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit `u(2,1)` et `u(2,2)` dans la console Python.

```
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n):
        u=u**2-2*u+2
    return u
```

2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a = 2$? On admettra ce résultat sans démonstration.

Partie C : étude dans le cas général.

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de a.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)}$.

2. Déterminer, suivant les valeurs du réel a strictement supérieur à 1, la limite de la suite (u_n).

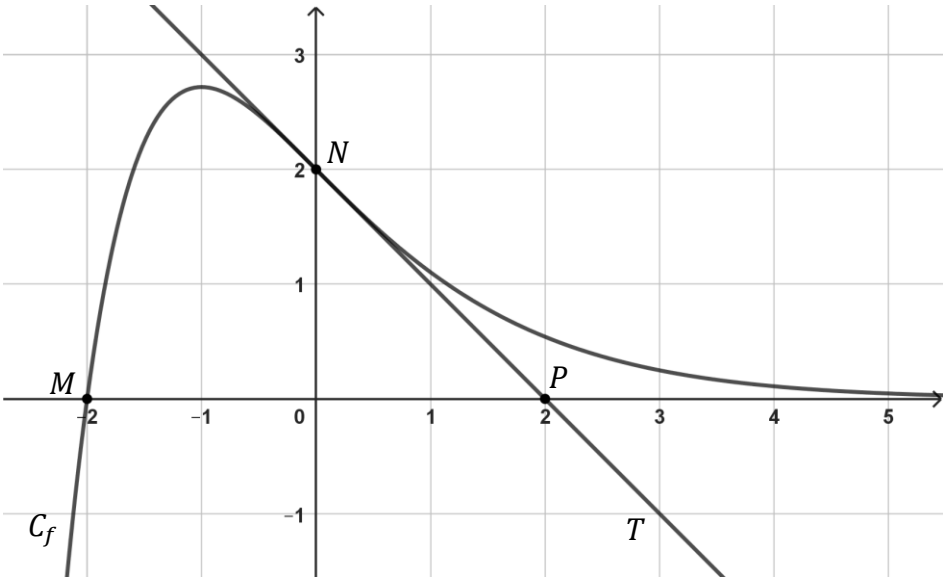
Exercice 4 (6 points)

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative C_f de la fonction f ;
- la tangente T à C_f en son point $N(0\,;2)$;
- le point $M\ (-2\,;0)$ appartenant à C_f et $P(2\,;0)$ appartenant à la tangente T.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$.



Partie A : étude graphique.

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1.

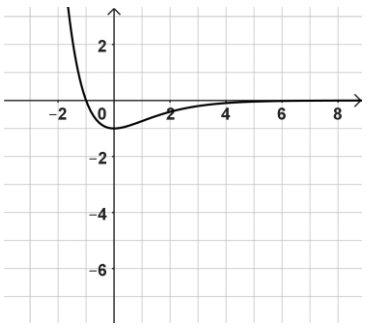
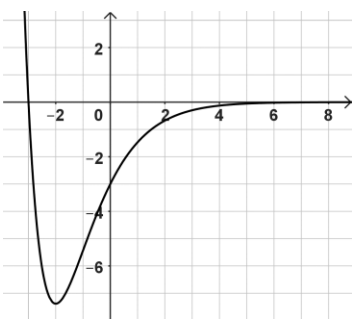
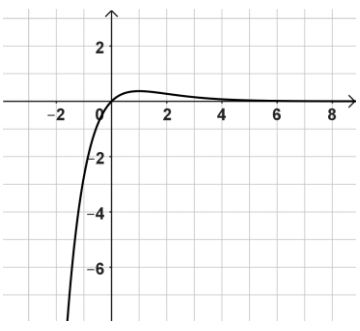
a. Donner $f(0)$.

b. Déterminer $f'(0)$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.

4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.

Courbe 1	Courbe2	Courbe 3
		

Partie B : recherche d'une expression algébrique.

On admet que la fonction f est de la forme $f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{\lambda x}$, où a, b et λ sont des constantes réelles. Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.

2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.

3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique.

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. On admet que $f'(x) = (-x - 1)\mathrm{e}^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f. Justifier.

3.

a. Étudier la convexité de f.

b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe C_f.

4. Pour tout nombre réel $t \geq 0$, on pose :

$$I(t) = \int_{-2}^{t} f(x)dx\,.$$

a. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I(t) = (-t - 3)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2}\,.$$

b. En déduire un exemple de surface non limitée dont l'aire est finie.

65 Métropole - Jour 2 Secours (24-MATJ2ME2)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

La directrice d'une école souhaite réaliser une étude auprès des étudiants qui ont passé l'examen de fin d'étude, pour analyser la façon dont ils pensent avoir réussi cet examen.

Pour cette étude, on demande aux étudiants à l'issue de l'examen de répondre individuellement à la question : « Pensez-vous avoir réussi l'examen ? ». Seules les réponses « oui » ou « non » sont possibles, et on observe que 91,7 % des étudiants interrogés ont répondu « oui ».

Suite à la publication des résultats à l'examen, on découvre que :

- 65 % des étudiants ayant échoué ont répondu « non » ;
- 98 % des étudiants ayant réussi ont répondu « oui ».

On interroge au hasard un étudiant qui a passé l'examen.

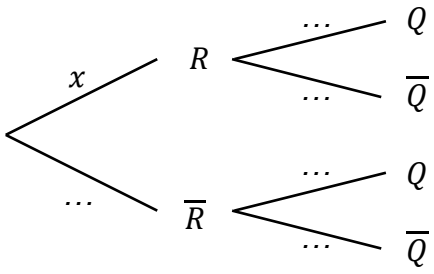
On note R l'événement « l'étudiant a réussi l'examen » et Q l'événement « l'étudiant a répondu « oui » à la question ».

Pour un événement A quelconque, on note $P(A)$ sa probabilité et $\bar{A}$ son événement contraire.

Dans tout l'exercice, les probabilités sont, si besoin, arrondies à 10^{-3} près.

1. Préciser les valeurs des probabilités $P(Q)$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q})$.

2. On note x la probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen.



a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

b. Montrer que $x = 0{,}9$.

3. L'étudiant interrogé a répondu « oui » à la question.
Quelle est la probabilité qu'il ait réussi l'examen ?

4. La note obtenue par un étudiant interrogé au hasard est un nombre entier entre 0 et 20. On suppose qu'elle est modélisée par une variable aléatoire N qui suit la loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615). La directrice souhaite attribuer une récompense aux étudiants ayant obtenu les meilleurs résultats.
À partir de quelle note doit-elle attribuer les récompenses pour que 65 % des étudiants soient récompensés ?

5. On interroge au hasard dix étudiants.
Les variables aléatoires $N_1, N_2, \ldots, N_{10}$ modélisent la note sur 20 obtenue à l'examen par chacun d'entre eux. On admet que ces variables sont indépendantes et suivent la même loi binomiale de paramètres (20 ; 0,615).
Soit S la variable définie par $S = N_1 + N_2 + \cdots + N_{10}$.
Calculer l'espérance $E(S)$ et la variance $V(S)$ de la variable aléatoire S.

6. On considère la variable aléatoire $M = \frac{S}{10}$.

a. Que modélise cette variable aléatoire M dans le contexte de l'exercice ?

b. Justifier que $E(M) = 12{,}3$ et $V(M) = 0{,}47355$.

c. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier l'affirmation ci-dessous.

« La probabilité que la moyenne des notes de dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80 % ».

Exercice 2 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Alain possède une piscine qui contient $50\ \mathrm{m}^3$ d'eau. On rappelle que $1\mathrm{m}^3 = 1000\ \mathrm{L}$.
Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.

Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $\mathrm{mg.L}^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et $3\ \mathrm{mg.L}^{-1}$.

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à $0{,}01\ \mathrm{mg.L}^{-1}$. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de $0{,}70\ \mathrm{mg.L}^{-1}$.

Partie A : étude d'un modèle discret.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de $15\ \mathrm{g}$ de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de $0{,}3\ \mathrm{mg.L}^{-1}$.

2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore, en $\mathrm{mg.L}^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0{,}7$.
On admet que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}92v_n + 0{,}3$.

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

b. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.

4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-contre écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
def alerte_chlore(s) :
    n=0
    v=0.7
    while …… :
        n= ……
        v= ……
    return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu.

Alain décide de faire appel à un bureau d'études spécialisées. Celui-ci utilise un modèle continu pour décrire le taux de chlore dans la piscine.

Dans ce modèle, pour une durée x (en jours écoulés à compter du mercredi 19 juin), $f(x)$ représente le taux de chlore, en $\mathrm{mg.L}^{-1}$, dans la piscine.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle $(E) : y' = -0{,}08y + \frac{q}{50}$, où q est la quantité de chlore, en gramme, rajoutée dans la piscine chaque jour.

1. Justifier que la fonction f est de la forme $f(x) = Ce^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}$ où C est une constante réelle.

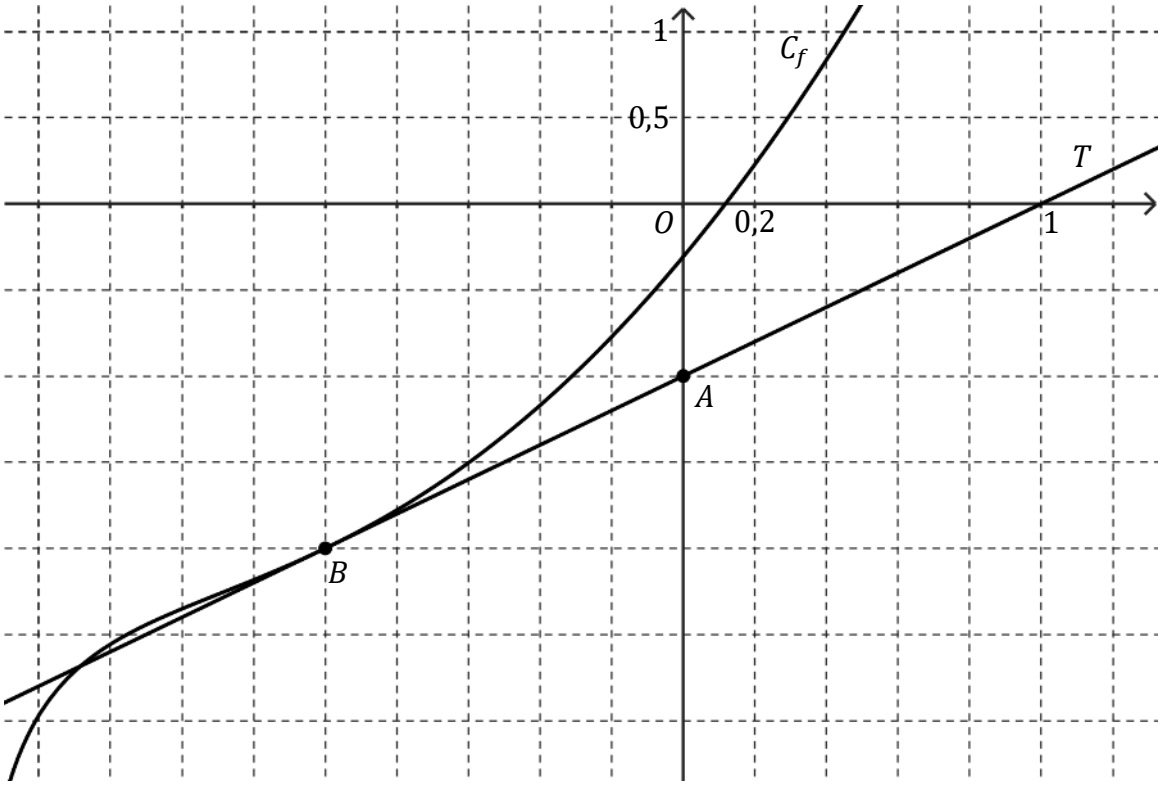
2.

a. Exprimer en fonction de q la limite de f en $+\infty$.

b. On rappelle que le taux de chlore observé le mercredi 19 juin est égal à $0{,}7\ \mathrm{mg.L}^{-1}$.
On souhaite que le taux de chlore se stabilise à long terme autour de $2\ \mathrm{mg.L}^{-1}$. Déterminer les valeurs de C et q afin que ces deux conditions soient respectées.

Exercice 3 (6 points)

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;+\infty[$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-dessous la courbe C_f et sa tangente T au point B d'abscisse -1.
On précise que la droite T passe par le point $A(0\,;-1)$.



Partie A : exploitation du graphique.

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La courbe C_f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f.

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2)$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphiquement ce résultat. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;+\infty[$.

6. Montrer que C_f admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale.

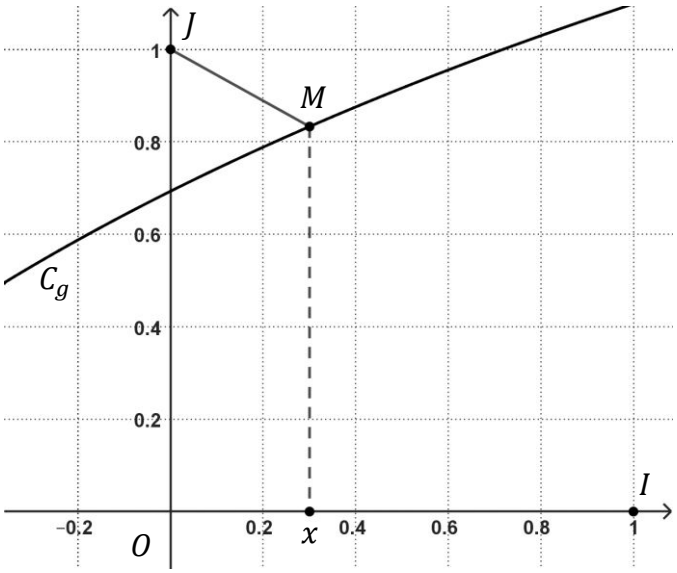
Soit g la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x+2)$.

On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;I,J)$, représentée ci-contre.

Soit M un point de C_g d'abscisse x.

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.

On considère la fonction h définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $h(x) = JM^2$.



1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.

2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.
On admet également que pour tout réel $x > -2$,

$$h'(x) = \frac{2\,f(x)}{x+2}.$$

où f est la fonction étudiée en partie B.

a. Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\,;+\infty[$.
Les limites ne sont pas demandées.

b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question 4 de la partie B.

3. On notera M_α le point de C_g d'abscisse α.

a. Montrer que $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

b. En déduire que la tangente à C_g au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.
On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

Tourner la page

Exercice 4 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$$A(2;0;0),\ B(0;4;3),\ C(4;4;1),\ D(0;0;4\ )\ \text{et}\ H(-1;1;2).$$

Affirmation 1 : les points A, C et D définissent un plan $\mathcal{P}$ d'équation $8x-5y+4z-16=0$.

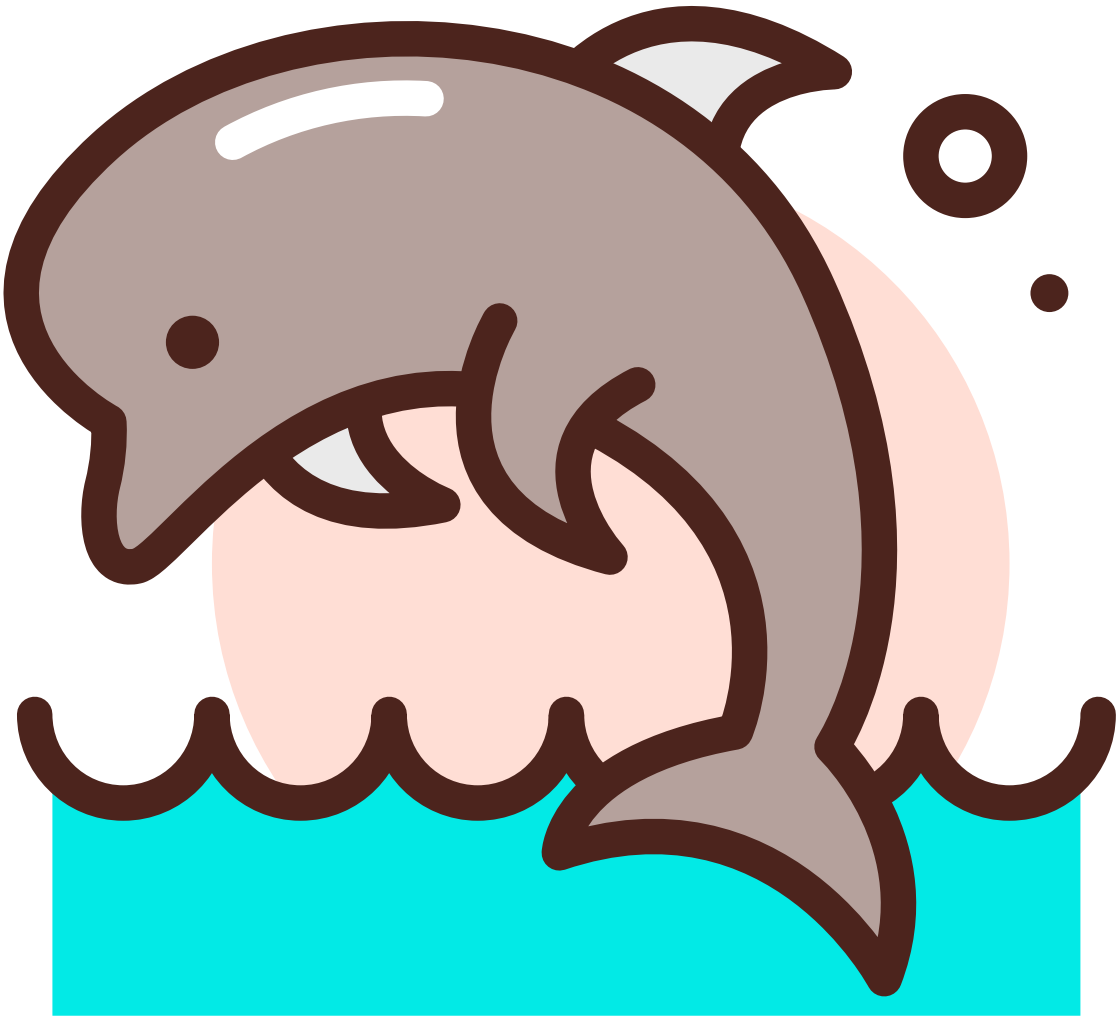
Affirmation 2 : les points A, B, C et D sont coplanaires.

Affirmation 3 : les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

On admet que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $x-y+2z-2=0$.

Affirmation 4 : le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

66 Polynésie - Jour 1 (24-MATJ1PO1)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1. (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

Les quatre affirmations se placent dans la situation suivante :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points :

$$A(2\,;\ 1\,;-1),\ B(-1\,;\ 2\,;1) \text{ et } C(5\,;\ 0\,;-3).$$

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne :

$$x+5y-2z+3=0.$$

On note $\mathcal{D}$ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-t+3 \\ y=t+2 \\ z=2t+1 \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

Affirmation 1 :

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (OAC).

Affirmation 2 :

Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont sécantes au point C.

Affirmation 3 :

La droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

Affirmation 4 :

Le plan médiateur du segment $[BC]$, noté Q, a pour équation cartésienne :

$$3x-y-2z-7=0.$$

On rappelle que le plan médiateur d'un segment est le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

Exercice 2. (5 points)

Une entreprise fabrique des objets en plastique en injectant dans un moule de la matière fondue à 210°C. On cherche à modéliser le refroidissement du matériau à l'aide d'une fonction f donnant la température du matériau injecté en fonction du temps t. Le temps est exprimé en seconde et la température est exprimée en degré Celsius.
On admet que la fonction f cherchée est solution d'une équation différentielle de la forme suivante où m est une constante réelle que l'on cherche à déterminer :

$$(E) : y' + 0{,}02y = m$$

Partie A

1. Justifier l'affichage suivant d'un logiciel de calcul formel :

Entrée :	RésoudreEquationDifférentielle($y' + 0{,}02y = m$)
Sortie :	$\boxed{\rightarrow}\ y = k * \exp(-0.02 * t) + 50 * m$

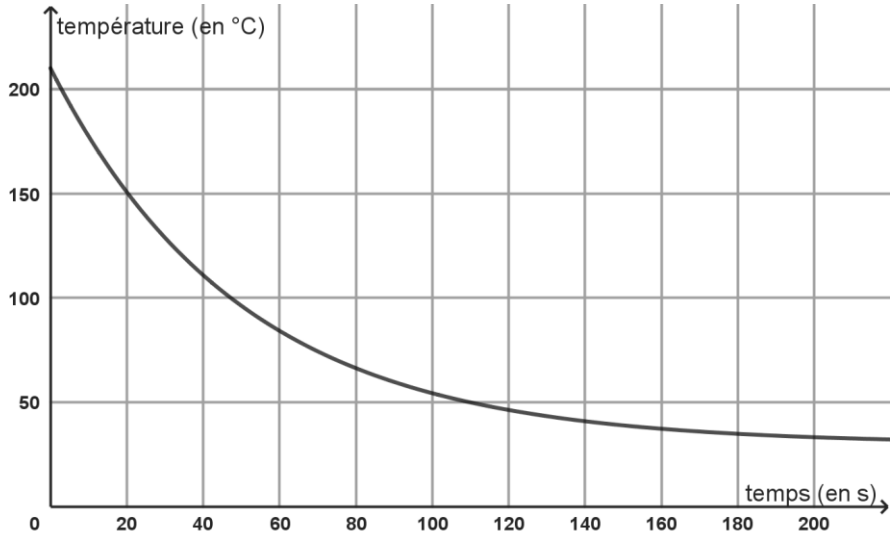
2. La température de l'atelier est de 30° C. On admet que la température $f(t)$ tend vers 30 lorsque t tend vers l'infini. Démontrer que $m = 0{,}6$.

3. Déterminer l'expression de la fonction f cherchée en tenant compte de la condition initiale $f(0) = 210$.

Partie B

On admet ici que la température (exprimée en degré Celsius) du matériau injecté en fonction du temps (exprimé en seconde) est donnée par la fonction dont l'expression et une représentation graphique sont données ci-dessous :

$$f(t) = 180\ \mathrm{e}^{-0{,}02t} + 30$$



1. L'objet peut être démoulé lorsque sa température devient inférieure à 50° C.
   a. Par lecture graphique, donner une valeur approchée du nombre T de secondes à attendre avant de démouler l'objet.
   b. Déterminer par le calcul la valeur exacte de ce temps T.

2. À l'aide d'une intégrale, calculer la valeur moyenne de la température sur les 100 premières secondes.

Exercice 3. (5 points)

Les probabilités demandées seront exprimées sous forme de fractions irréductibles.

Partie A

On lance trois fois de suite une pièce de monnaie bien équilibrée. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois, sur les trois lancers, où la pièce est retombée du côté « Face ».

1. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

2. Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X = k)$				

Partie B

Voici les règles d'un jeu où le but est d'obtenir trois pièces du côté « Face » en un ou deux essais :

- On lance trois pièces équilibrées :
  - Si les trois pièces sont tombées du côté « Face », la partie est gagnée ;
  - Sinon, les pièces tombées du côté « Face » sont conservées et on relance celles tombées du côté « Pile ».
- La partie est gagnée si on obtient trois pièces du côté « Face », sinon elle est perdue.

On considère les événements suivants :

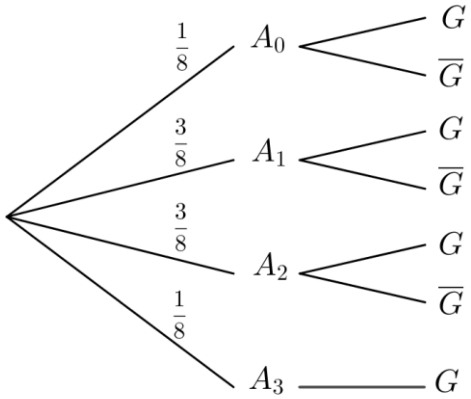
- G: « la partie est gagnée ».

Et pour tout entier k compris entre 0 et 3, les événements :

- A_k : « k pièces sont tombées du côté « Face » au premier lancer ».

1. Démontrer que $P_{A_1}(G) = \frac{1}{4}$.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. Démontrer que la probabilité p de gagner à ce jeu est $p = \frac{27}{64}$.

4. La partie a été gagnée. Quelle est la probabilité qu'exactement une pièce soit tombée du côté « Face » à la première tentative ?

5. Combien de fois faut-il jouer à ce jeu pour que la probabilité de gagner au moins une partie dépasse 0,95 ?

Exercice 4. (6 points)

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.
Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}.$$

Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = ...
    for i in range(n):
        ...
    return u
```

2. L'exécution de `suite(2)` renvoie `1.3333333333333333`.
Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.

3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
>> suite(2)
1.3333333333333333
>> suite(5)
1.0058479532163742
>> suite(10)
1.0000057220349845
>> suite(20)
1.000000000005457
```

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty ; 5[$ par :

$$f(x) = \frac{4}{5 - x}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty ; 5[$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$$

3. **a.** Soit x un réel de l'intervalle $]-\infty ; 5[$. Prouver l'équivalence suivante :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0.$$

b. Résoudre $f(x) = x$ dans l'intervalle $]-\infty ; 5[$.

4. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

5. Le comportement de la suite serait-il identique en choisissant comme terme initial $u_0 = 4$ au lieu de $u_0 = 3$?

67 Polynésie - Jour 2 (24-MATJ2PO1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1. (4 points)

Un sondage réalisé en France fournit les informations suivantes :

- 60% des plus de 15 ans ont l'intention de regarder les Jeux Olympiques et Paralympiques (JOP) de Paris 2024 à la télévision.
- Parmi ceux qui ont l'intention de regarder les JOP, 8 personnes sur 9 déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

On choisit au hasard une personne de plus de 15 ans. On considère les événements suivants :

- J : « la personne choisie a l'intention de regarder les JOP Paris 2024 à la télévision »
- S : « la personne choisie déclare pratiquer une activité sportive régulière »

On note $\bar{J}$ et $\bar{S}$ leurs événements contraires respectifs.
Dans les questions **1.** *et* **2.**, *les probabilités seront données sous la forme d'une fraction irréductible.*

1. Démontrer que la probabilité que la personne choisie ait l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière est de $\frac{8}{15}$.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

Selon ce sondage, deux personnes sur trois parmi les plus de 15 ans déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

2. **a.** Calculer la probabilité que la personne choisie n'ait pas l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière.
b. En déduire la probabilité de S sachant $\bar{J}$ notée $P_{\bar{J}}(S)$.

Dans la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième.

3. Dans le cadre d'une opération de promotion, 30 personnes de plus de 15 ans sont choisies au hasard.
On assimile ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.

a. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
b. Calculer la probabilité qu'exactement 16 personnes déclarent pratiquer une activité sportive régulière.
c. La fédération française de judo souhaite offrir une place pour la finale de l'épreuve par équipe mixte de judo à l'Arena Champ-de-Mars pour chaque personne déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi ces 30 personnes.
Le prix d'une place s'élève à 380 € et on dispose d'un budget de 10 000 euros pour cette opération.
Quelle est la probabilité que ce budget soit insuffisant ?

Exercice 2. (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) qui comprend cinq questions. Les cinq questions sont indépendantes. Pour chacune des questions, ***une seule des quatre réponses est exacte****. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.*
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève aucun point.

1. La solution f de l'équation différentielle $y' = -3y + 7$ telle que $f(0) = 1$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

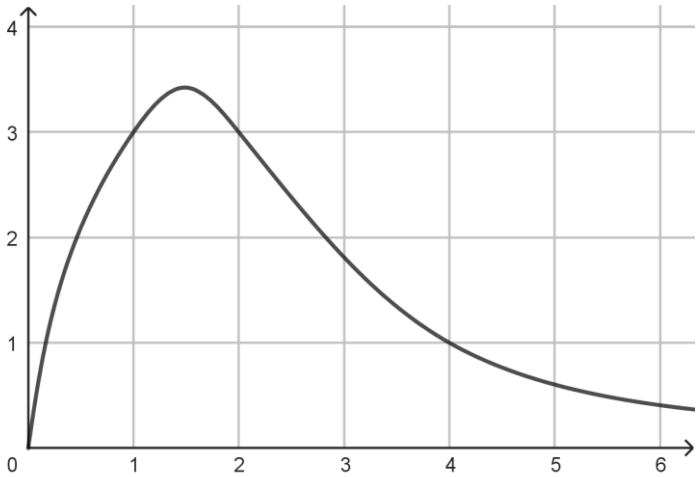
A. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$

B. $f(x) = -\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-3x} + \frac{7}{3}$

C. $f(x) = \mathrm{e}^{-3x} + \frac{7}{3}$

D. $f(x) = \frac{10}{3}\mathrm{e}^{-3x} - \frac{7}{3}$

2. La courbe d'une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ est donnée ci-dessous.



Un encadrement de l'intégrale $I = \int_1^5 f(x)\mathrm{d}x$ est :

A. $0 \leq I \leq 4$

B. $1 \leq I \leq 5$

C. $5 \leq I \leq 10$

D. $10 \leq I \leq 15$

3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2\ln(x^2 + 4)$.

Alors $\int_0^2 g'(x)\mathrm{d}x$ vaut, à 10^{-1} près :

A. 4,9

B. 8,3

C. 1,7

D. 7,5

4. Une professeure enseigne la spécialité mathématiques dans une classe de 31 élèves de terminale.

Elle veut former un groupe de 5 élèves. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe de 5 élèves ?

A. 31^5

B. $31 \times 30 \times 29 \times 28 \times 27$

C. $31 + 30 + 29 + 28 + 27$

D. $\binom{31}{5}$

5. La professeure s'intéresse maintenant à l'autre spécialité des 31 élèves de son groupe :

- 10 élèves ont choisi la spécialité physique-chimie ;
- 20 élèves ont choisi la spécialité SES ;
- 1 élève a choisi la spécialité LLCE espagnol.

Elle veut former un groupe de 5 élèves comportant exactement 3 élèves ayant choisi la spécialité SES. De combien de façons différentes peut-elle former un tel groupe ?

A. $\binom{20}{3} \times \binom{11}{2}$

B. $\binom{20}{3} + \binom{11}{2}$

C. $\binom{20}{3}$

D. $20^3 \times 11^2$

Exercice 3. (6 points)

On considère la suite (u_n), définie par :

$$u_0 = 8 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n - \ln\left(\frac{u_n}{4}\right).$$

1. a. Donner les valeurs arrondies au centième de u_1 et u_2.

b. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous en Python. On admet que, pour tout réel strictement positif `a`, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de `a`.

```
def mystere(k):
    u = 8
    S = 0
    for i in range(k):
        S = S + u
        u = u - log(u / 4)
    return S
```

L'exécution de `mystere(10)` renvoie `58.44045206721732`. Que représente ce résultat ?

c. Modifier la fonction précédente afin qu'elle renvoie la moyenne des k premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln\left(\frac{x}{4}\right).$$

On donne ci-dessous une représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f pour les valeurs de x comprises entre 0 et 6 :

Étudier les variations de f sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0 ; +\infty[$. Les limites ne sont pas demandées.

Dans la suite de l'exercice, on remarquera que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle.
On note ℓ la valeur de cette limite.

c. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

d. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 4. (5 points)

Une commune décide de remplacer le traditionnel feu d'artifice du 14 juillet par un spectacle de drones lumineux.

Pour le pilotage des drones, l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$ dont l'unité est la centaine de mètres.

La position de chaque drone est modélisée par un point et chaque drone est envoyé d'un point de départ D de coordonnées $(2; 5; 1)$.

On souhaite former avec des drones des figures en les positionnant dans un même plan $\mathcal{P}$.

Trois drones sont positionnés aux points $A(-1; -1; 17)$, $B(4; -2; 4)$ et $C(1; -3; 7)$.

1. Justifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Dans la suite, on note $\mathcal{P}$ le plan (ABC) et on considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

2.

a. Justifier que $\vec{n}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $2x - 3y + z - 18 = 0$.

3. Le pilote des drones décide d'envoyer un quatrième drone en prenant comme trajectoire la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = t + 5 \\ z = 4t + 1 \end{cases}, \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

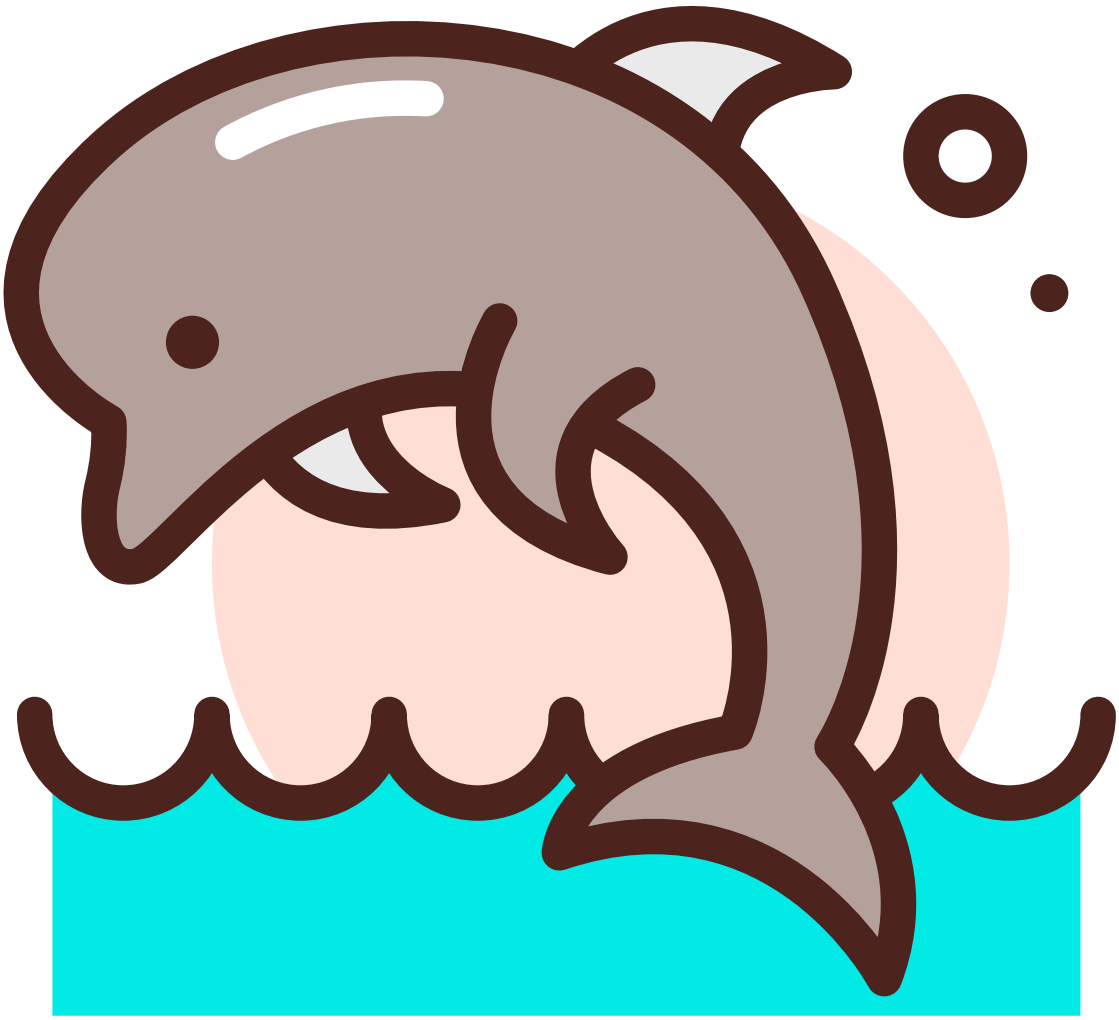
a. Déterminer un vecteur directeur de droite d.

b. Afin que ce nouveau drone soit également placé dans le plan $\mathcal{P}$, déterminer par le calcul les coordonnées du point E, intersection de la droite d avec le plan $\mathcal{P}$.

4. Le pilote des drones décide d'envoyer un cinquième drone le long de la droite Δ qui passe par le point D et qui est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$. Ce cinquième drone est placé lui aussi dans le plan $\mathcal{P}$, soit à l'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathcal{P}$. On admet que le point $F(6; -1; 3)$ correspond à cet emplacement.
Démontrer que la distance entre le point de départ D et le plan $\mathcal{P}$ vaut $2\sqrt{14}$ centaines de mètres.

5. L'organisatrice du spectacle demande au pilote d'envoyer un nouveau drone dans le plan $\mathcal{P}$ (peu importe sa position dans le plan), toujours à partir du point D. Sachant qu'il reste 40 secondes avant le début du spectacle et que le drone vole en trajectoire rectiligne à 18,6 $m.s^{-1}$, le nouveau drone peut-il arriver à temps ?

68 Polynésie - Jour 1 Remplacement (24-MATJ1PO3)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1. (5 points)

Une concession automobile vend deux sortes de véhicules :

- 60 % sont des véhicules tout-électrique ;
- 40 % sont des véhicules hybrides rechargeables.

75 % des acheteurs de véhicules tout-électrique et 52 % des acheteurs de véhicules hybrides ont la possibilité matérielle d'installer une borne de recharge à domicile.

On choisit un acheteur au hasard et on considère les événements suivants :

- E : « l'acheteur choisit un véhicule tout-électrique » ;
- B : « l'acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile ».

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième si nécessaire.

1. Calculer la probabilité que l'acheteur choisisse un véhicule tout-électrique et qu'il ait la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Démontrer que $\mathrm{P}(B) = 0{,}658$.

3. Un acheteur a la possibilité d'installer une borne de recharge à son domicile. Quelle est la probabilité qu'il choisisse un véhicule tout-électrique ?

4. On choisit un échantillon de 20 acheteurs. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre total d'acheteurs pouvant installer une borne de recharge à leur domicile parmi l'échantillon de 20 acheteurs.

a. Déterminer la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

b. Calculer $\mathrm{P}(X = 8)$.

c. Calculer la probabilité qu'au moins 10 acheteurs puissent installer une borne de recharge.

d. Calculer l'espérance de X.

e. La directrice de la concession décide d'offrir l'installation de la borne de recharge aux acheteurs ayant la possibilité d'en installer une à leur domicile. Cette installation coûte 1200 €.
En moyenne, quelle somme doit-elle prévoir d'engager pour cette offre lors de la vente de 20 véhicules ?

Exercice 2. (6 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + x$.
Affirmation A : La fonction f admet pour tableau de variations le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
variations de f	$-\infty$ ↗ $+\infty$

Affirmation B : L'équation $f(x) = -2$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.

2. **Affirmation C** :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = -\frac{1}{3}.$$

3. On considère la fonction k définie et continue sur $\mathbb{R}$ par

$$k(x) = 1 + 2\mathrm{e}^{-x^2+1}.$$

Affirmation D : Il existe une primitive de la fonction k décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. On considère l'équation différentielle (E): $3y' + y = 1$.
Affirmation E : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + 1$$

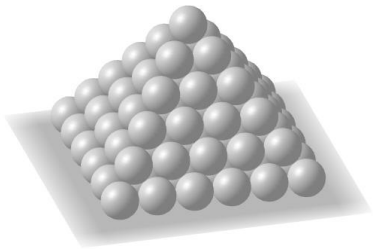
est solution de l'équation différentielle (E) avec $g(0) = 5$.

5. **Affirmation F** : Une intégration par parties permet d'obtenir :

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}dx = 1 - 2\mathrm{e}^{-1}.$$

Exercice 3. (4 points)

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :



- le 1er étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule ;
- le 2e étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules ;
- le 3e étage possède 9 boules ;
- …
- le n-ième étage possède n^2 boules.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n-ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Calculer le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages.

2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

a. Calculer S_5 et interpréter ce résultat.

b. On considère la fonction `pyramide` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python. Recopier et compléter sur la copie le cadre ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul `n`, l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de `n` étages.

```
def pyramide(n):
    S = 0
    for i in range(1,n+1):
        S = ...
    return ...
```

c. Vérifier que pour tout entier naturel n :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}.$$

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$:

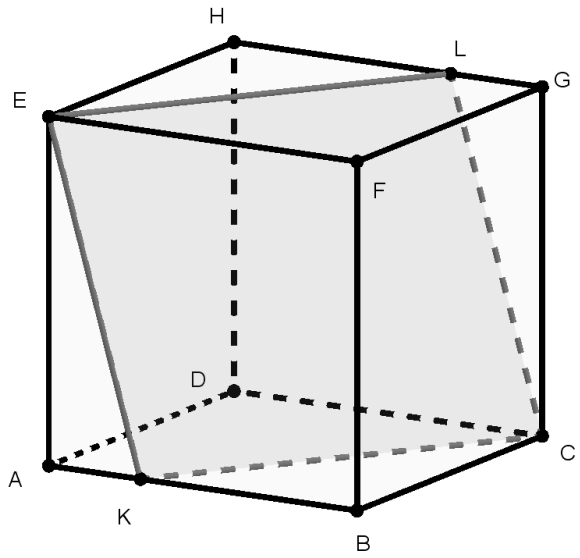
$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges. Combien d'oranges utilise-t-il pour construire la plus grande pyramide possible ?

Exercice 4. (5 points)

On considère un cube $ABCDEFGH$ et l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
Pour tout réel m appartenant à l'intervalle [0 ; 1], on considère les points K et L de coordonnées :

$$K(m\ ;0\ ;0)\ \text{ et }\ L(1-m\ ;1\ ;1).$$



1. Donner les coordonnées des points E et C dans ce repère.

2. Dans cette question, $m = 0$. Ainsi, le point $L(1\ ;1\ ;1)$ est confondu avec le point G, le point $K(0\ ;0\ ;0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).

a. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est normal au plan (GEA).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (GEA).

On s'intéresse désormais à la nature de $CKEL$ en fonction du paramètre m.

3. Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle [0; 1].

a. Démontrer que $CKEL$ est un parallélogramme.

b. Justifier que $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = m(m-1)$.

c. Démontrer que $CKEL$ est un rectangle si, et seulement si, $m = 0$ ou $m = 1$.

4. Dans cette question, $m = \frac{1}{2}$. Ainsi, L a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$.

a. Démontrer que le parallélogramme $CKEL$ est alors un losange.

b. À l'aide de la question **3. b.**, déterminer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{CKE}$.

69 Métropole - Jour 1 Remplacement (24-MATJ1ME3)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Mercredi 11 septembre 2024

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

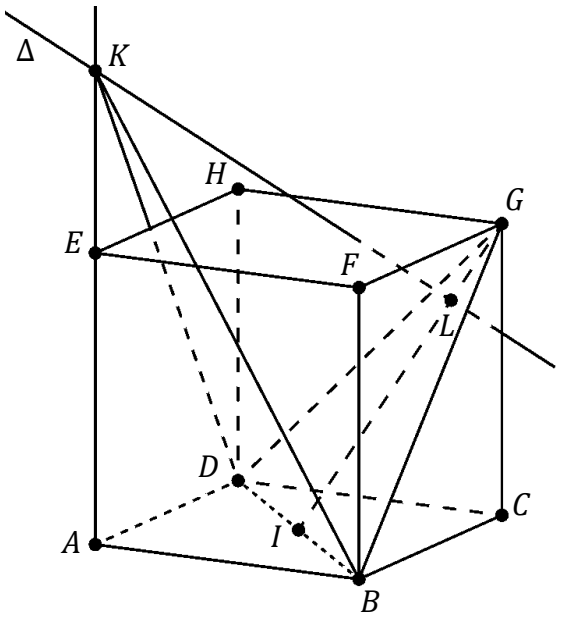
Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (6 points)

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.



Le point I est le milieu du segment $[BD]$. On définit le point L tel que $\overrightarrow{IL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IG}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1.

a. Préciser les coordonnées des points D, B, I et G. Aucune justification n'est attendue.

b. Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8}; \frac{7}{8}; \frac{3}{4}\right)$.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.

3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\begin{cases} x = \frac{7}{8} + t \\ y = \frac{7}{8} + t \\ z = \frac{3}{4} - t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

b. Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0\,;0\,;\frac{13}{8}\right)$.

c. Que représente le point L pour le point K ? Justifier la réponse.

4.

a. Calculer la distance KL.

b. On admet que le triangle DBG est équilatéral. Montrer que son aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c. En déduire le volume du tétraèdre $KDBG$.

On rappelle que :

- le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base ;
- un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0\,;0\,;a)$.

a. Exprimer le volume V_a de la pyramide $ABCDK_a$ en fonction de a.

b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t' \\ y = t' \\ z = -t' + a \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$.

On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG). Montrer que les coordonnées du point L_a sont $\left(\frac{a+1}{3}\,;\frac{a+1}{3}\,;\frac{2a-1}{3}\right)$.

c. Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre $GBDK_a$ et la pyramide $ABCDK_a$ soient de même volume.

Exercice 2 (5 points)

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montagne locale comme représenté en Figure 1. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 cm (Figure 2).

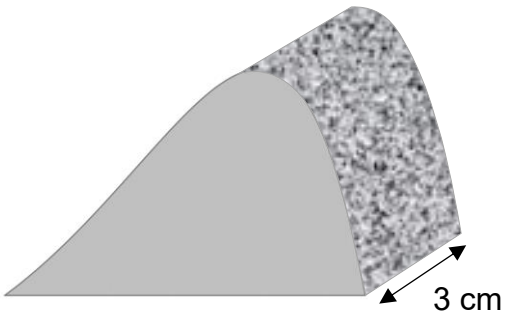


Figure 1

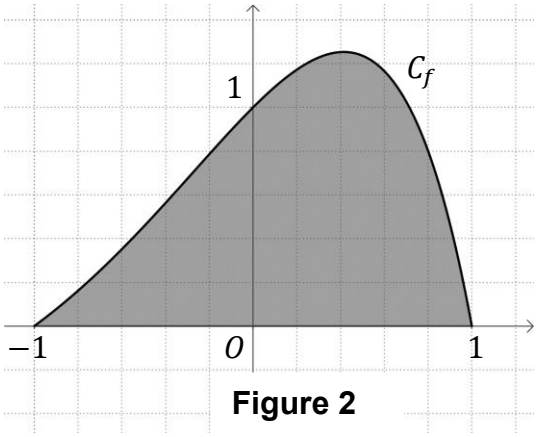


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée C_f de la fonction f définie sur $[-1\,;1]$ par :

$$f(x) = (1 - x^2)\mathrm{e}^x.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1.

a. Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1\,;1]$ on a $f(x) \geq 0$.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x dx.$$

2. Le volume V de chocolat, en cm^3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$V = 3 \times S.$$

où S est l'aire, en cm^2, de la surface colorée (Figure 2).

En déduire que ce volume V, arrondi à 0,1 cm^3 près, est égal à 4,4 cm^3.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0{,}01\ ;\ +\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2(2 - 3\ln q) - 3.$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0{,}01\ ;\ +\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1.

a. Déterminer $\lim\limits_{q \to +\infty} B(q)$.

b. Montrer que, pour tout $q \geq 0{,}01, B'(q) = 8\,q\,(1 - 6\ln q)$.

c. Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0{,}01\ ;\ +\infty[$. Dresser le tableau de variation complet de la fonction B.

d. Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?

2.

a. Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1{,}2\ ;\ +\infty[$.
Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

b. On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0{,}01\ ;\ 1{,}2]$.
On donne $\alpha \approx 0{,}757$.
En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.

Exercice 3 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :

pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = -0{,}8t_n + 18$.

Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

2. On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul *:*

$$3n - 4 \leqslant S_n \leqslant 3n + 4.$$

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \frac{S_n}{n}$.

Affirmation 2 : La suite (u_n) converge*.*

3. On considère la suite (v_n) définie par :

$v_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n}$.

Affirmation 3 : pour tout entier naturel $n \geq 1, v_n = \frac{n+1}{n}$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \mathrm{e}^n - n$.

Affirmation 4 : la suite (u_n) converge*.*

5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n.

```
def  u(n):
     valeur = 2
     for k in range (n):
         valeur=0.5*(valeur+2/valeur)
     return valeur
```

On admet que la suite (u_n) est décroissante et vérifie pour tout entier naturel n :

$$\sqrt{2} \leqslant u_n \leqslant 2 \ .$$

Affirmation 5 : La suite (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

Tourner la page

Exercice 4 (4 points)

Les deux parties sont indépendantes.

Un laboratoire fabrique un médicament conditionné sous forme de cachets.

Partie A

Un contrôle de qualité, portant sur la masse des cachets, a montré que 2 % des cachets ont une masse non conforme. Ces cachets sont conditionnés par boîtes de 100 choisis au hasard dans la chaîne de production. On admet que la conformité d'un cachet est indépendante de celle des autres.

On note N la variable aléatoire qui à chaque boîte de 100 cachets associe le nombre de cachets non conformes dans cette boîte.

1. Justifier que la variable aléatoire N suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer l'espérance de N et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

3. *On arrondira les résultats à 10^{-3} près.*

a. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne exactement trois cachets non conformes.

b. Calculer la probabilité qu'une boîte contienne au moins 95 cachets conformes.

4. Le directeur du laboratoire veut modifier le nombre de cachets par boîte pour pouvoir affirmer : « La probabilité qu'une boîte ne contienne que des cachets conformes est supérieure à 0,5. ».
Combien de cachets une boîte doit-elle contenir au maximum pour respecter ce critère ? Justifier.

Partie B

On admet que les masses des cachets sont indépendantes les unes des autres. On prélève 100 cachets et on note M_i, pour i entier naturel compris entre 1 et 100, la variable aléatoire qui donne la masse en gramme du i-ème cachet prélevé.

On considère la variable aléatoire S définie par :

$$S = M_1 + M_2 + \cdots + M_{100}\,.$$

On admet que les variables aléatoires M_1, M_2, …, M_{100} suivent la même loi de probabilité d'espérance $\mu = 2$ et d'écart-type σ.

1. Déterminer $E(S)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2. On note s l'écart type de la variable aléatoire S.
Montrer que : $s = 10\sigma$.

3. On souhaite que la masse totale, en gramme, des comprimés contenus dans une boîte soit strictement comprise entre 199 et 201 avec une probabilité au moins égale à $0{,}9$.

a. Montrer que cette condition est équivalente à :

$$P(|S - 200| \geq 1) \leq 0{,}1\,.$$

b. En déduire la valeur maximale de σ qui permet, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, d'assurer cette condition.

70 Métropole - Jour 2 Remplacement (24-MATJ2ME3)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Jeudi 12 septembre 2024

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

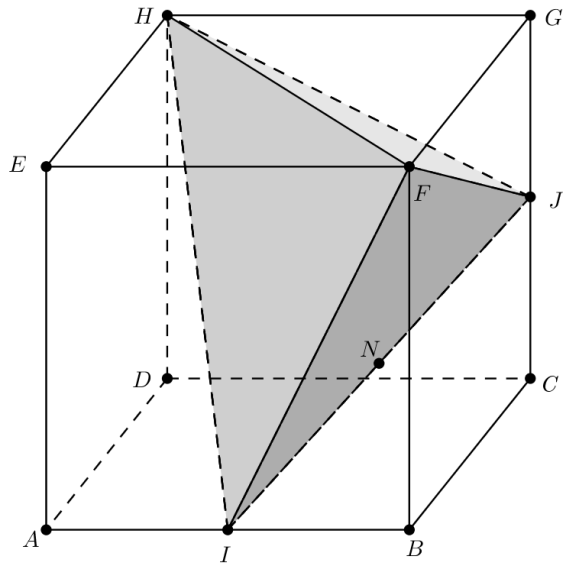
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CG]$.
Le point N est le milieu du segment $[IJ]$.

L'objectif de cet exercice est de calculer le volume du tétraèdre $HFIJ$.
On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1.

a. Donner les coordonnées des points I *et* J. En déduire les coordonnées de N.

b. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{NF}$ ont pour coordonnées respectives :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}0{,}5\\1\\0{,}5\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{NF}\begin{pmatrix}0{,}25\\-0{,}5\\0{,}75\end{pmatrix}.$$

c. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{NF}$ sont orthogonaux.

On admet que $NF = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

d. En déduire que l'aire du triangle FIJ est égale à $\frac{\sqrt{21}}{8}$.

2. On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

a. Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (FIJ).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (FIJ) est : $4x - y - 2z - 2 = 0$.

c. On note d la droite orthogonale au plan (FIJ) passant par le point H.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

d. Montrer que la distance du point H au plan (FIJ) est égale à $\frac{5\sqrt{21}}{21}$.

e. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.

Calculer le volume du tétraèdre $HFIJ$. On donnera la réponse sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 2 (5 points)

La partie C est indépendante des parties A et B.

Un robot est positionné sur un axe horizontal et se déplace plusieurs fois d'un mètre sur cet axe, aléatoirement vers la droite ou vers la gauche.
Lors du premier déplacement, la probabilité que le robot se déplace à droite est égale à $\frac{1}{3}$.
S'il se déplace à droite, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à droite lors du déplacement suivant est égale à $\frac{3}{4}$.
S'il se déplace à gauche, la probabilité que le robot se déplace de nouveau à gauche lors du déplacement suivant est égale à $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

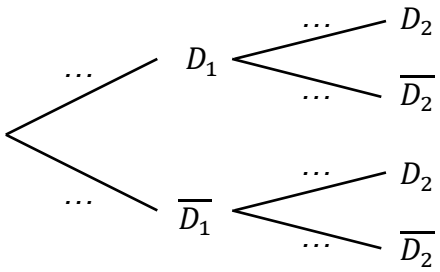
- D_n l'événement : « le robot se déplace à droite lors du n-ième déplacement » ;
- $\overline{D_n}$ l'évènement contraire de D_n ;
- p_n la probabilité de l'événement D_n.

On a donc $p_1 = \frac{1}{3}$.

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$.

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Déterminer la probabilité que le robot se déplace deux fois à droite.

3. Montrer que $p_2 = \frac{7}{12}$.

4. Le robot s'est déplacé à gauche lors du deuxième déplacement. Quelle est la probabilité qu'il se soit déplacé à droite lors du premier déplacement ?

Partie B : étude de la suite (p_n).

On souhaite estimer le déplacement du robot au bout d'un nombre important d'étapes.

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}.$$

On pourra s'aider d'un arbre.

2.

a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $p_n \leq p_{n+1} < \frac{2}{3}$.

b. La suite (p_n) est-elle convergente ? Justifier.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $u_n = p_n - \frac{2}{3}$.

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

b. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Dans cette partie, on considère un autre robot qui réalise dix déplacements d'un mètre indépendants les uns des autres, chaque déplacement vers la droite ayant une probabilité fixe égale à $\frac{3}{4}$.
Quelle est la probabilité qu'il revienne à son point de départ au bout des dix déplacements ? On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

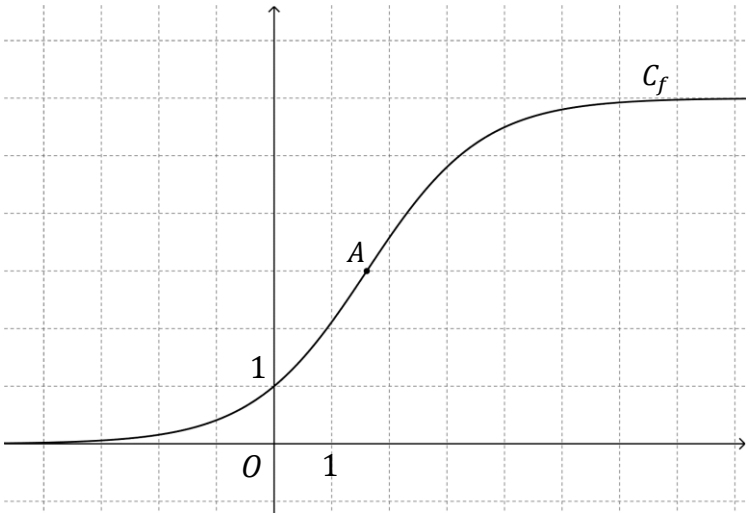
Exercice 3 (5 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6}{1 + 5\mathrm{e}^{-x}}.$$

On a représenté sur le schéma ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f.



1. Montrer que le point A de coordonnées $(\ln 5\ ;3)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. Montrer que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

3.

a. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{30\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2}.$$

b. En déduire le tableau de variation complet de f sur $\mathbb{R}$.

4. On admet que :

- f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note f'' sa dérivée seconde ;
- pour tout réel x,

$$f''(x) = \frac{30\mathrm{e}^{-x}(5\mathrm{e}^{-x}-1)}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^3}.$$

a. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$. On montrera en particulier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion.

b. Justifier que pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;\ln 5]$, on a : $f(x) \geq \frac{5}{6}x + 1$.

5. On considère une fonction F_k définie sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = k\ln(\mathrm{e}^x + 5)$, où k est une constante réelle.

a. Déterminer la valeur du réel k de sorte que F_k soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 5$ est égale à $6\ln\left(\frac{5}{3}\right)$.

Partie B

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$(E)\ :\ y' = y - \frac{1}{6}y^2.$$

On rappelle qu'une solution de l'équation (E) est une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, on a :

$$u'(x) = u(x) - \frac{1}{6}u(x)^2.$$

1. Montrer que la fonction f définie dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$.

3. On désigne par g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas. On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{g(x)}$. On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g' et h' les fonctions dérivées de g et h.

a. Montrer que si h est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$, alors g est solution de l'équation différentielle $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

b. Pour tout réel positif m, on considère les fonctions g_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = \frac{6}{1+6m\mathrm{e}^{-x}}.$$

Montrer que pour tout réel positif m, la fonction g_m est solution de l'équation différentielle $(E)\ : y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

Exercice 4 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère le script écrit en langage Python ci-dessous.

```
def seuil(S) :
    n=0
    u=7
    while u<S :
        n=n+1
        u=1.05*u+3
    return(n)
```

Affirmation 1 : l'instruction `seuil(100)` renvoie la valeur 18.

2. Soit (S_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $S_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$.

Affirmation 2 : la suite (S_n) converge vers $\frac{5}{4}$.

3. Affirmation 3 : dans une classe composée de 30 élèves, on peut former 870 binômes de délégués différents.

4. On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.

Affirmation 4 : l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

5. Affirmation 5 :

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,dx = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}.$$

71 Amérique du Sud - Jour 1 (24-MATJ1AS1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé

Dès que le sujet est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 (5 points)

PARTIE A

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + \frac{1}{4}y = 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$, d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = ax\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. On considère l'équation différentielle $(E') : y' + \frac{1}{4}y = 0$, d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
   Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E').

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = (20x + 8)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et on note f', sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. De plus, on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. a. Justifier que, pour tout réel x positif, $f'(x) = (18 - 5x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$.

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f. On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

   a. Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[14 ; 15]$.

   b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction `solution_equation` ci-contre, écrite en langage Python

```
from math import exp
def f(x):
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation():
    a,b = 14,15
    while b-a > 0.1 :
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 8:
            a = m
        else:
            b = m
    return a,b
```

a	14				
b	15				
$b-a$	1				
m	14,5				
Condition $f(m) > 8$	FAUX				

   c. Quel est l'objectif de la fonction `solution_equation` dans le contexte de la question ?

EXERCICE 2 (6 points)

On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 boules noires et 6 boules blanches.
L'urne U_2 contient 1 boule noire et 3 boules blanches.

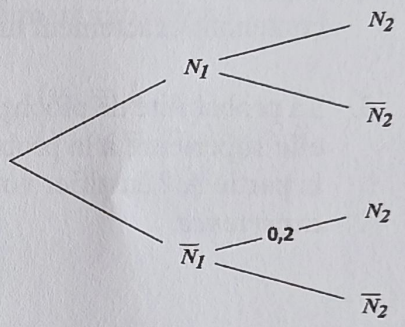
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On pioche au hasard une boule dans U_1 que l'on place dans U_2, puis on pioche au hasard une boule dans U_2.

On note :
- N_1 l'événement « Piocher une boule noire dans l'urne U_1 ».
- N_2 l'événement « Piocher une boule noire dans l'urne U_2 ».

Pour tout événement A, on note $\bar{A}$ son événement contraire.

PARTIE A

1. On considère l'arbre de probabilités ci-contre.



   a. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 sachant qu'on a pioché une boule blanche dans l'urne U_1, est 0,2.

   b. Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, en faisant apparaître sur chaque branche les probabilités des événements concernés, sous forme décimale.

2. Calculer la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_1 et une boule noire dans l'urne U_2.

3. Justifier que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28.

4. On a pioché une boule noire dans l'urne U_2. Calculer la probabilité d'avoir pioché une boule blanche dans l'urne U_1. On donnera le résultat sous forme décimale arrondie à 10^{-2}.

PARTIE B

n désigne un entier naturel non nul.
L'expérience aléatoire précédente est répétée n fois de façon identique et indépendante, c'est-à-dire que les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2, entre chaque expérience.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on pioche une boule noire dans l'urne U_2.

On rappelle que la probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 est égale à 0,28 et celle de piocher une boule blanche dans l'urne U_2 est égale à 0,72.

1. Déterminer la loi de probabilité suivie par X. Justifier votre réponse.

2. Déterminer par le calcul le plus petit entier naturel n tel que : $1 - 0{,}72^n \geq 0{,}9$.

3. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'expérience.

PARTIE C

Dans cette partie les urnes U_1 et U_2 sont remises dans leur configuration initiale, avec respectivement 4 boules noires et 6 boules blanches dans l'urne U_1 et 1 boule noire et 3 boules blanches dans l'urne U_2.

On considère la nouvelle expérience aléatoire suivante :
On pioche simultanément deux boules dans l'urne U_1 que l'on place dans l'urne U_2, puis on pioche au hasard une boule dans l'urne U_2.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 ?

2. Combien y a-t-il de tirages possibles de deux boules simultanément dans l'urne U_1 contenant exactement une boule blanche et une boule noire ?

3. La probabilité de piocher une boule noire dans l'urne U_2 avec cette nouvelle expérience est-elle supérieure à la probabilité de tirer une boule noire dans l'urne U_2 avec l'expérience de la partie A ? Justifier votre réponse. *On pourra s'aider d'un arbre pondéré modélisant cette expérience.*

EXERCICE 3 (4 points)

Répondre par VRAI ou FAUX à chacune des affirmations suivantes et justifier votre réponse.
Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans la notation.
Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \frac{25 + (-1)^n}{n}$.

Affirmation 1 : La suite (u_n) est divergente.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \frac{w_n}{1 + w_n} \end{cases}$.

On admet que pour tout entier naturel n, $w_n > 0$.
On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_n = \frac{k}{w_n}$ où k est un nombre réel strictement positif.

Affirmation 2 : La suite (t_n) est une suite arithmétique strictement croissante.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \ln(1 + v_n) \end{cases}$.
On admet que pour tout entier naturel n, $v_n > 0$.

Affirmation 3 : La suite (v_n) est décroissante.

4. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln(x))^n \, \mathrm{d}x$.

Affirmation 4 : Pour tout entier naturel n, $I_{n+1} = \mathrm{e} - (n + 1)\, I_n$.

EXERCICE 4 (5 points)

L'objectif de cet exercice est de déterminer la distance entre deux droites non coplanaires.

Par définition, la distance entre deux droites non coplanaires de l'espace, (d_1) et (d_2) est la longueur du segment [EF], où E et F sont des points appartenant respectivement à (d_1) et à (d_2) tels que la droite (EF) est orthogonale à (d_1) et à (d_2).

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit (d_1), la droite passant par $A(1\,;2\,;-1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et (d_2) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases}x = 0\\y = 1+t\\z = 2+t\end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (d_1).

2. Démontrer que les droites (d_1) et (d_2) sont non coplanaires.

3. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u_1}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.
   Justifier qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $-2x+y+5z+5=0$

4. **a.** Sans chercher à calculer les coordonnées du point d'intersection, justifier que la droite (d_2) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants.

   b. On note F le point d'intersection de la droite (d_2) et du plan $\mathcal{P}$.
   Vérifier que le point F a pour coordonnées $\left(0\,;-\frac{5}{3}\,;-\frac{2}{3}\right)$.

Soit (δ) la droite passant par F et de vecteur directeur $\vec{w}$. On admet que les droites (δ) et (d_1) sont sécantes en un point E de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}\,;-\frac{4}{3}\,;-1\right)$.

5. **a.** Justifier que la distance EF est la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

   b. Calculer la distance entre les droites (d_1) et (d_2).

72 Amérique du Sud - Jour 2 (24-MATJ2AS1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé

Dès que le sujet est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

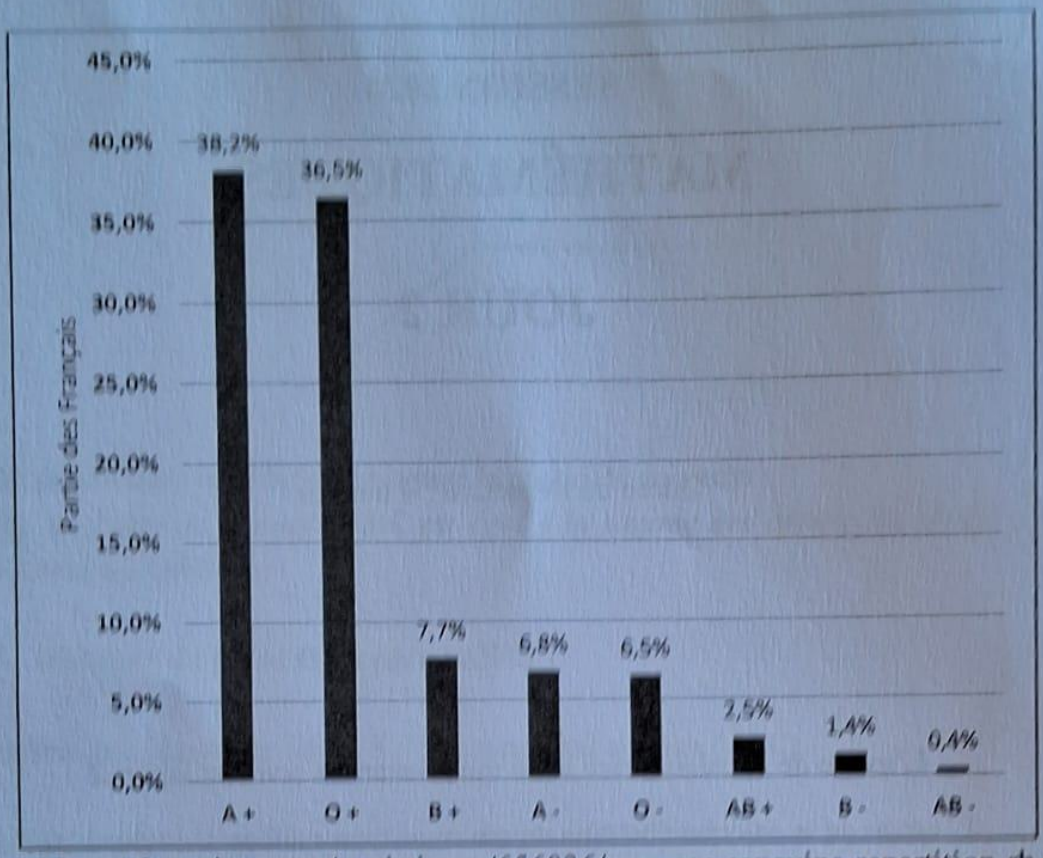
Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 (5 points)

Voici la répartition des principaux groupes sanguins des habitants de France :



Source : https://fr.statista.com/statistiques/656036/groupes-sanguins-repartition-rh-france/

A +, O +, B +, A −, O −, AB +, B − et AB − sont les différents groupes sanguins combinés aux rhésus.

Par exemple : A + est le groupe sanguin A de rhésus +.

Une expérience aléatoire consiste à choisir une personne au hasard dans la population française et à déterminer son groupe sanguin et son rhésus.

Dans l'exercice, on adopte les notations du type :

$A+$ est l'événement « la personne est de groupe sanguin A et de rhésus + »
$A-$ est l'événement « la personne est de groupe sanguin A et de rhésus − »
A est l'événement « la personne est de groupe sanguin A »

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1

On note $Rh+$ l'évènement « La personne est de rhésus positif ».

1. Justifier que la probabilité que la personne choisie soit de rhésus positif est égale à 0,849.

2. Démontrer à l'aide des données de l'énoncé que $P_{Rh+}(A) = 0{,}450$ à 0,001 près.

3. Une personne se souvient que son groupe sanguin est AB mais a oublié son rhésus. Quelle est la probabilité que son rhésus soit négatif ? Arrondir le résultat à 0,001 près.

Partie 2

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 0,001 près.

Un donneur universel de sang est une personne de groupe sanguin O et de rhésus négatif. On rappelle que 6,5% de la population française est de groupe $O-$.

1. On considère 50 personnes choisies au hasard dans la population française et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de donneurs universels.

   a. Déterminer la probabilité que 8 personnes soient des donneurs universels.
   Justifier votre réponse.

   b. On considère la fonction ci-dessous nommée `proba` d'argument `k` écrite en langage Python.

```
def proba(k):
    p = 0
    for i in range(k+1):
        p = p + binomiale(i,50,0.065)
    return p
```

   Cette fonction utilise la fonction `binomiale` d'argument `i`, `n` et `p`, créée pour l'occasion, qui renvoie la valeur de la probabilité $P(X = \text{i})$ dans le cas où X suit une loi binomiale de paramètres `n` et `p`.
   Déterminer la valeur numérique renvoyée par la fonction `proba` lorsqu'on saisit `proba(8)` dans la console Python. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Quel est le nombre minimal de personnes à choisir au hasard dans la population française pour que la probabilité qu'au moins une des personnes choisies soit donneur universel, soit supérieure à 0,999.

EXERCICE 2 (5 points)

Cet exercice contient 5 affirmations.

Pour chaque affirmation, répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse.
Toute absence de justification ou justification incorrecte ne sera pas prise en compte dans la notation.

Partie 1

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}\, u_n + 2$.

1. **Affirmation 1** : La suite (u_n) est décroissante minorée par 0.

2. **Affirmation 2** : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. **Affirmation 3** : La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$ est géométrique.

Partie 2

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{3}{2}y + 2$ d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur **R.**

1. **Affirmation 4** : Il existe une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).

2. Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ on note C_f la courbe représentative de la fonction f solution de (E) tel que $f(0) = 0$.
   Affirmation 5 : La tangente au point d'abscisse 1 de C_f a pour coefficient directeur 2 e$^{\frac{3}{2}}$.

EXERCICE 3 (5 points)

Partie 1

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels **R** par :

$$f(x) = (x^2 - 4)\mathrm{e}^{-x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur **R** et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Justifier que pour tout réel x, $f'(x) = (-x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{e}^{-x}$.

3. En déduire les variations de la fonction f sur **R**.

Partie 2

On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \int_{-2}^{0} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier que $I_0 = \mathrm{e}^2 - 1$.

2. En utilisant une intégration par partie, démontrer l'égalité :

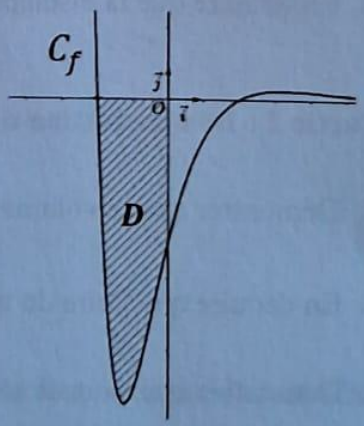
$$I_{n+1} = (-2)^{n+1}\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n.$$

3. En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.

Partie 3

1. Déterminer le signe sur **R** de la fonction f définie dans la **partie 1**.

2. On a représenté ci-contre la courbe C_f de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

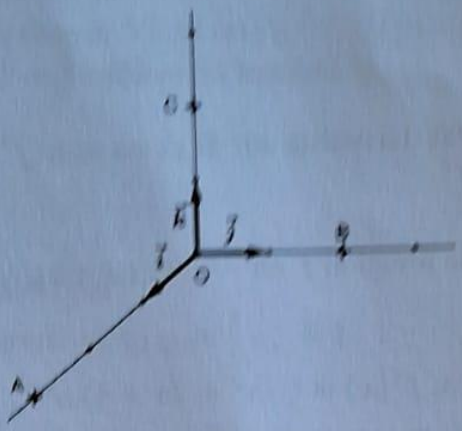


Le domaine ***D*** du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire ***S*** du domaine ***D***.

EXERCICE 4 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les trois points A(3 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 2).



L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété suivante :
« Le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des 3 autres faces du tétraèdre OABC ».

Partie 1 : Distance du point O au plan (ABC)

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2 ; 3 ; 3)$ est normal au plan (ABC).

2. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x + 3y + 3z - 6 = 0$.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par O et de vecteur directeur $\vec{n}$.

4. On note H le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC). Déterminer les coordonnées du point H.

5. En déduire que la distance du point O au plan (ABC) est égale à $\frac{3\sqrt{22}}{11}$.

Partie 2 : Démonstration de la propriété

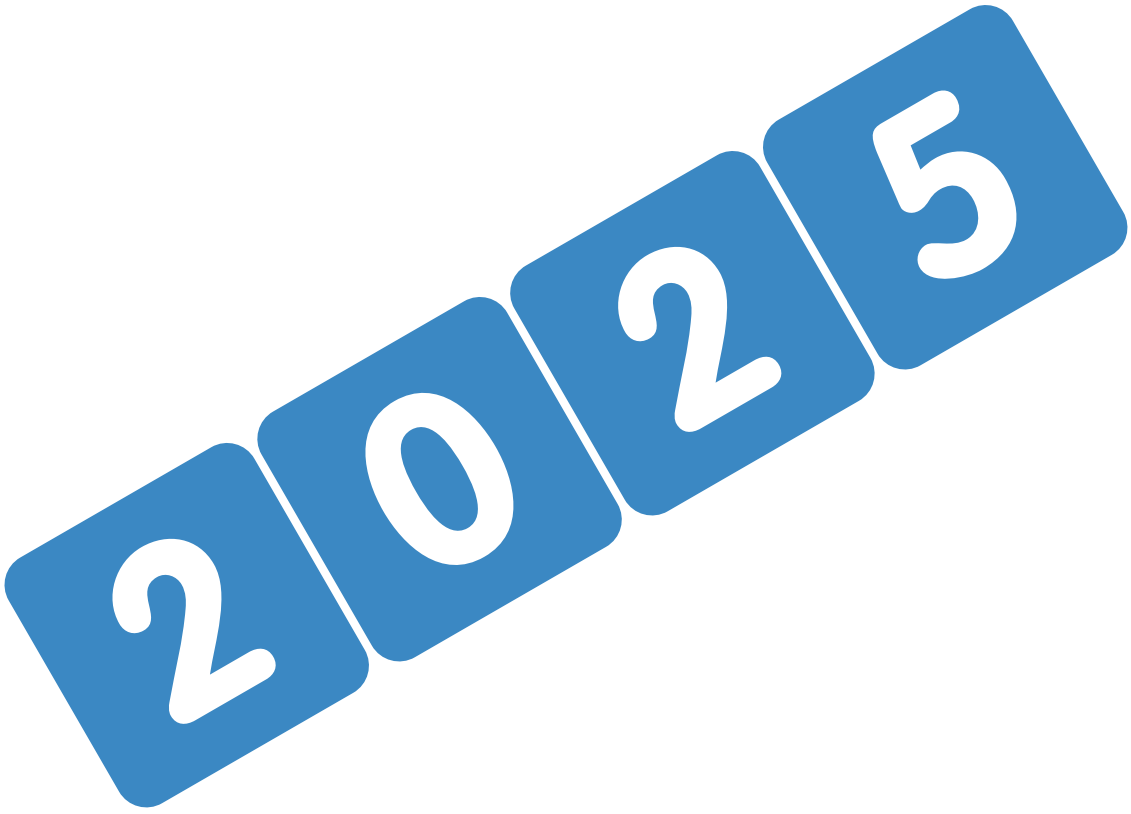
1. Démontrer que le volume du tétraèdre OABC est égal à 2.

2. En déduire que l'aire du triangle ABC est égale à $\sqrt{22}$.

3. Démontrer que pour le tétraèdre OABC, *« le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des 3 autres faces du tétraèdre ».*

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}B \times h$ où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est la hauteur relative à cette base.

Cinquième partie
Session 2025



73 Amérique du Nord - Jour 1 (25-MATJ1AN1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (6 points)

Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C. Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

- 25 % des connexions transitent via le serveur A ;
- 15 % des connexions transitent via le serveur B ;
- le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels, etc.).

On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs. L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

- 90 % des connexions via le serveur A sont stables ;
- 80 % des connexions via le serveur B sont stables ;
- 85 % des connexions via le serveur C sont stables.

Les parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées séparément.

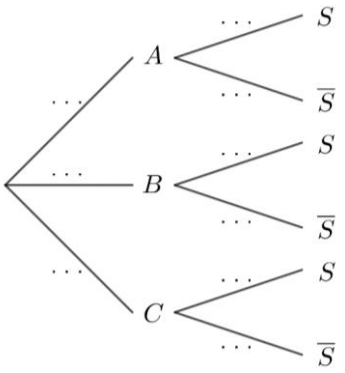
Partie A

On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise. On considère les événements suivants :

- A : « La connexion s'est effectuée via le serveur A » ;
- B : « La connexion s'est effectuée via le serveur B » ;
- C : « La connexion s'est effectuée via le serveur C » ;
- S : « La connexion est stable ».

On note $\overline{S}$ l'événement contraire de l'événement S.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.



2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à $0{,}12$.

3. Calculer la probabilité $P(C \cap \bar{S})$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'événement S est $P(S) = 0{,}855$.

5. On suppose désormais que la connexion est stable. Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B. *On donnera la valeur arrondie au millième*.

Partie B

D'après la **partie A**, la probabilité qu'une connexion soit **instable** est égale à $0{,}145$.

1. Dans le but de détecter les dysfonctionnements de serveurs, on étudie un échantillon de 50 connexions au réseau, ces connexions étant choisies au hasard. On suppose que le nombre de connexions est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables au réseau de l'entreprise, dans cet échantillon de 50 connexions.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables. *On donnera la valeur arrondie au millième.*

2. Dans cette question, on constitue désormais un échantillon de n connexions, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire égale aux nombres de connexions instables et on admet que X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $0{,}145$.

a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'au moins une connexion de cet échantillon soit instable.

b. Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que la probabilité p_n est supérieure ou égale à $0{,}99$.

3. On s'intéresse à la variable aléatoire F_n égale à la fréquence de connexions instables dans un échantillon de n connexions, où n désigne un entier naturel strictement positif.

On a donc $F_n = \frac{X_n}{n}$, où X_n est la variable aléatoire définie à la question 2.

a. Calculer l'espérance $E(F_n)$.

On admet que $V(F_n) = \frac{0{,}123975}{n}$.

b. Vérifier que : $P(|F_n - 0{,}145| \geq 0{,}1) \leq \frac{12{,}5}{n}$

c. Un responsable de l'entreprise étudie un échantillon de $1\,000$ connexions et constate que pour cet échantillon $F_{1000} = 0{,}3$. Il soupçonne un dysfonctionnement des serveurs. A-t-il raison ?

Exercice 2 (5 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1.

2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n, par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

a. Calculer a_0 et a_1.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $a_n \geq 3n - 1$.

d. En déduire la limite de la suite (a_n).

3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.
On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
1  def algo(p):
2      u=2
3      n=0
4      while u-1>p:
5          u=(2*u+1)/(u+2)
6          n=n+1
7      return (n,u)
```

a. Interpréter les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.

b. Donner, sans justifier, la valeur de `n` pour $p = 0{,}001$.

Exercice 3 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - 6t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

On considère également les points suivants :

- $A(3\,;-3\,;-2)$
- $B(5\,;-4\,;-1)$
- C le point de la droite (d) d'abscisse 2
- H le projeté orthogonal du point B sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3z - 7 = 0$

Affirmation 1
La droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

Affirmation 2
Le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne :

$$x + 3z + 3 = 0$$

Affirmation 3

Une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\frac{\pi}{6}$.

Affirmation 4

La distance BH est égale à $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

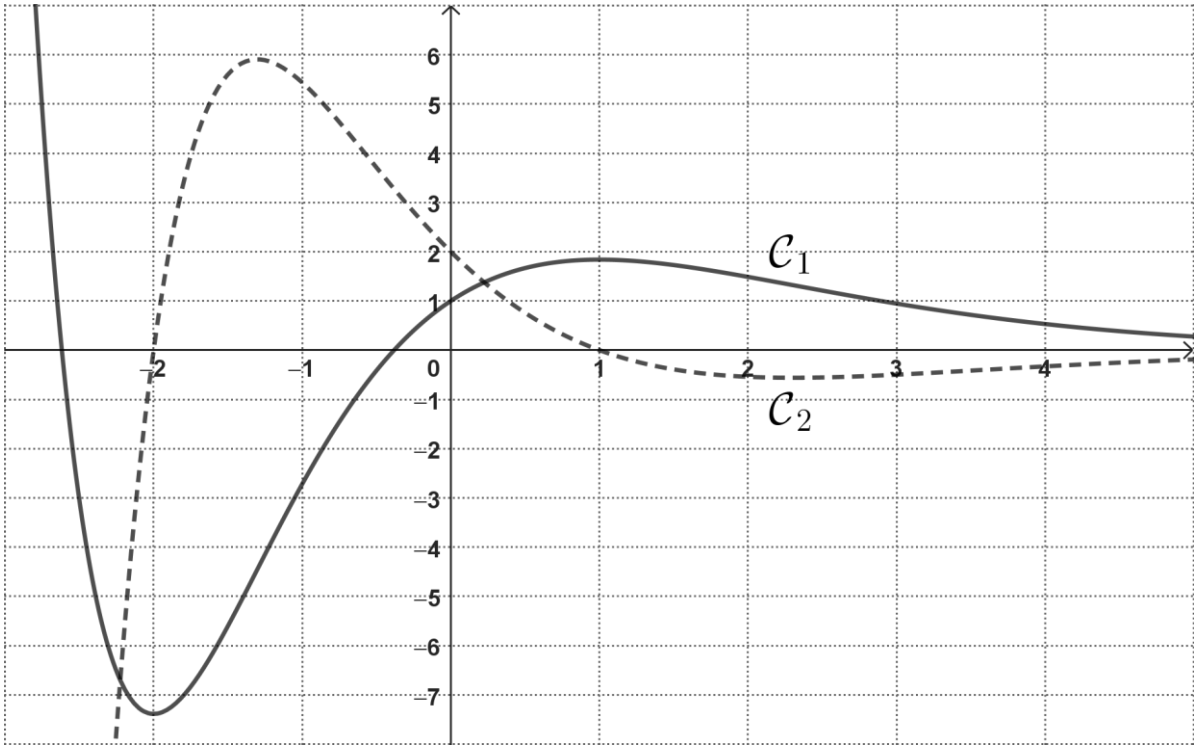
Exercice 4 (5 points)

La partie C est indépendante des parties A et B.

Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g'.
On précise également que :

- La courbe $\mathcal{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 1)$.
- La courbe $\mathcal{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; 2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2; 0)$ et $(1; 0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.
2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle $y + y' = (2x + 3)\mathrm{e}^{-x}$, où y est une fonction de la variable réelle x.

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = (x^2 + 3x)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y + y' = 0$.

3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).

4. On admet que la fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E). Déterminer alors l'expression de la fonction g.

5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (x^2 + 3x + 2)\mathrm{e}^{-x}$$

1. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.

On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

a. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x^2 - x + 1)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

4. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = (-x^2 - 5x - 7)\mathrm{e}^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

Soit α un nombre réel positif.

Déterminer l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

74 Amérique du Nord - Jour 2 (25-MATJ2AN1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Au basket-ball, il est possible de marquer des paniers rapportant un point, deux points ou trois points.

*Les **PARTIES A** et **B** sont indépendantes.*

PARTIE A

L'entraineur d'une équipe de basket décide d'étudier les statistiques de réussite des lancers de ses joueurs. Il constate qu'à l'entrainement, lorsque Victor tente un panier à trois points, il le réussit avec une probabilité de $0{,}32$.
Lors d'un entrainement, Victor effectue une série de 15 lancers à trois points. On suppose que ces lancers sont indépendants.

On note N la variable aléatoire qui donne le nombre de paniers marqués.

Les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.

1. On admet que la variable aléatoire N suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité que Victor réussisse exactement 4 paniers lors de cette série.

3. Déterminer la probabilité que Victor réussisse au plus 6 paniers lors de cette série.

4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire N.

5. On note T la variable aléatoire qui donne le nombre de **points** marqués après cette série de lancers.

a. Exprimer T en fonction de N.

b. En déduire l'espérance de la variable aléatoire T. Donner une interprétation de cette valeur dans le contexte de l'exercice.

c. Calculer $P(12 \leq T \leq 18)$.

PARTIE B

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par Victor lors d'un match.

On admet que l'espérance $E(X) = 22$ et la variance $V(X) = 65$.

Victor joue n matchs, où n est un nombre entier strictement positif.
On note X_1, X_2, …, X_n les variables aléatoires donnant le nombre de points marqués au cours des 1er , 2e , …, *n*-ième matchs. On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n sont indépendantes et suivent la même loi que celle de X.

On pose $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$.

1. Dans cette question, on prend $n = 50$.

a. Que représente la variable aléatoire M_{50}?

b. Déterminer l'espérance et la variance de M_{50}.

c. Démontrer que $P(|M_{50} - 22| \geq 3) \leq \frac{13}{90}$.

d. En déduire que la probabilité de l'événement « $19 < M_{50} < 25$ » est strictement supérieure à $0{,}85$.

2. Indiquer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
« Il n'existe aucun entier naturel n tel que $P(|M_n - 22| \geq 3) < 0{,}01$ ».

Exercice 2 (5 points)

Un des objectifs de cet exercice est de déterminer une approximation du nombre réel $\ln(2)$, en utilisant une des méthodes du mathématicien anglais Henry Briggs au 16e siècle.

On désigne par (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}\ .$$

PARTIE A

1. a. Donner la valeur exacte de u_1 et de u_2.

b. Émettre une conjecture, à l'aide de la calculatrice, sur le sens de variation et la limite éventuelle de la suite.

2. a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Résoudre dans l'intervalle $[0; +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.

d. Déterminer, en justifiant, la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

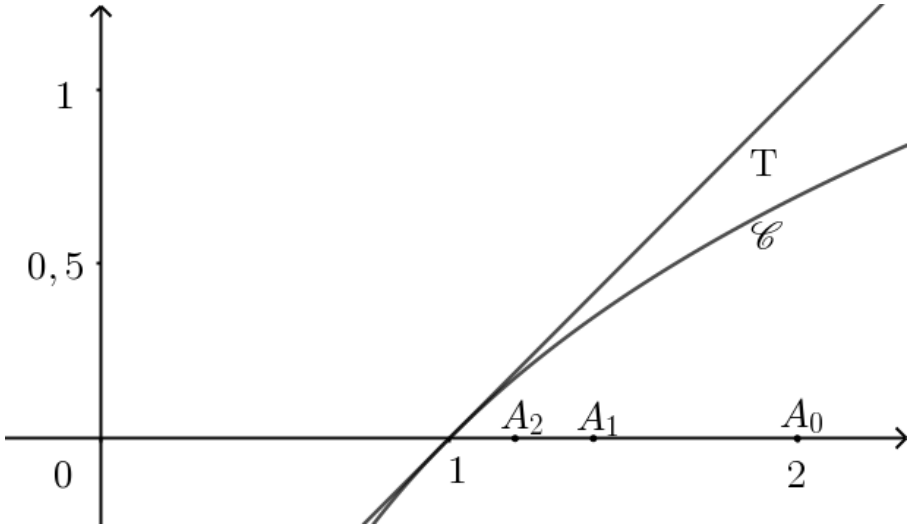
On désigne par (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n)$.

1. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $\ln(2) = 2^n \ln(u_n)$.

2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction ln et la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
Une équation de la droite T est $y = x - 1$.
Les points A_0, A_1, A_2 ont pour abscisses respectives u_0, u_1 et u_2 et pour ordonnée 0.



On décide de prendre $x-1$ comme approximation de $\ln(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $]0{,}99\,;\,1{,}01[$.

- **a.** Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel k tel que u_k appartienne à l'intervalle $]0{,}99\,;\,1{,}01[$ et donner une valeur approchée de u_k à 10^{-5} près.
- **b.** En déduire une approximation de $\ln(u_k)$.
- **c.** Déduire des questions 1.c. et 2.b. de la partie B une approximation de $\ln(2)$.

3. On généralise la méthode précédente à tout réel a strictement supérieur à 1.
Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que l'appel `Briggs(a)` renvoie une approximation de $\ln(a)$.
On rappelle que l'instruction en langage Python `sqrt(a)` *correspond à* $\sqrt{a}$.

```
from math import*
def Briggs(a):
    n = 0
    while a >= 1.01:
          a = sqrt(a)
          n = n+1
    L = ……

    return L
```

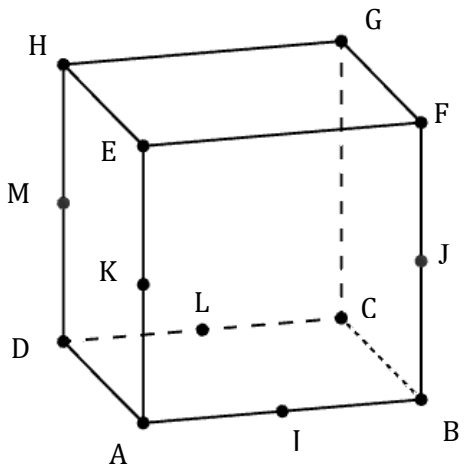
Exercice 3 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

PARTIE A

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.
Les points I, J, K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BF], [AE], [CD] et [DH].



Affirmation 1 : « $\overrightarrow{\mathrm{JH}} = 2\overrightarrow{\mathrm{BI}} + \overrightarrow{\mathrm{DM}} - \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ »

Affirmation 2 : « Le triplet de vecteurs $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AH}}, \overrightarrow{\mathrm{AG}}\right)$ est une base de l'espace. »

Affirmation 3 : « $\overrightarrow{\mathrm{IB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{LM}} = -\frac{1}{4}$ »

PARTIE B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 3z + 6 = 0$
- les points $\mathrm{A}\ (2\ ;\ 0\ ;-1)$ et $\mathrm{B}\ (5\ ;-3\ ;\ 7)$

Affirmation 4 : « Le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AB) sont parallèles. »

Affirmation 5 : « Le plan $\mathcal{P}$' parallèle à $\mathcal{P}$ passant par B a pour équation cartésienne $-2x + y - 3z + 34 = 0$ »

Affirmation 6 : « La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\frac{\sqrt{14}}{2}$. »

On note (d) la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -12 + 2k \\ y = 6 \\ z = 3 - 5k \end{cases}, \text{ où } \quad k \in \mathbb{R}$$

Affirmation 7 : « Les droites (AB) et (d) ne sont pas coplanaires. »

Exercice 4 (5 points)

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ par $f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x)$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

PARTIE A

1. a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, $f'(x) = \mathrm{e}^x(\sin(x) + \cos(x))$.

b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

2. a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

b. Démontrer que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, $\mathrm{e}^x \sin(x) \geq x$.

3. Justifier que le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ de la courbe représentative de la fonction f est un point d'inflexion.

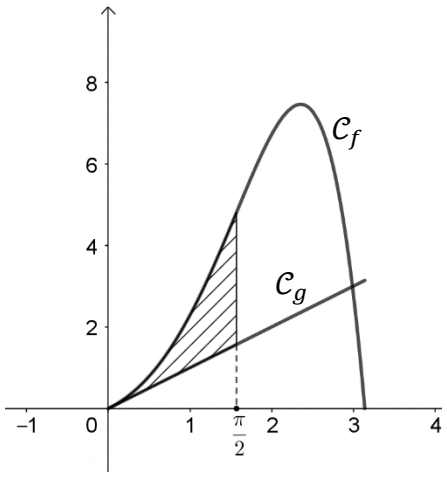
PARTIE B

On note $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$.

1. En intégrant par parties l'intégrale I de deux manières différentes, établir les deux relations suivantes : $\mathrm{I} = 1 + \mathrm{J}$ et $\mathrm{I} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \mathrm{J}$

2. En déduire que $\mathrm{I} = \frac{1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}{2}$.

3. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$.
Les courbes représentatives des fonctions f et g sont tracées dans le repère orthogonal ci-dessous sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.
Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine hachuré situé entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.



75 Amérique du Nord - Jour 2 Secours (25-MATPE2)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**
Coefficient : 16

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Tous les exercices doivent être traités.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidates et les candidats sont invités à faire figurer sur leurs copies toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse.

Exercice 1 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$.

On appelle C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée seconde de f, c'est-à-dire la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Pour tout réel x, calculer $f'(x)$.

3. Montrer que pour tout réel x :

$$f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

4. Étudier la convexité de la fonction f.

5. Étudier les variations de la fonction f' sur $\mathbf{R}$, puis dresser son tableau de variations en y faisant apparaître la valeur exacte de l'extremum.
Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.

6. En déduire le signe de la fonction f' sur $\mathbf{R}$, puis justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

7. Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
Donner un encadrement de α, au centième près.

8. On considère la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$.
Étudier la position relative de la courbe C_f par rapport à la droite Δ.

Partie B : Calcul d'aire

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe C_f, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$. On note

$$I_n = \int_1^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n.

2.

a. Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n.

b. Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

$(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.

On considère la droite D qui a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$

et le plan P qui a pour équation cartésienne : $2x - 3y + z - 6 = 0$.

1. Affirmation :

La droite D′, qui a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - 6t \\ z = 9 - 8t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$, est parallèle à la droite D.

2. On admet que les points A$(-2\,;3\,;1)$, B$(1\,;3\,;-4)$ et C$(6\,;3\,;9)$ ne sont pas alignés.

Affirmation : La droite D est orthogonale au plan défini par les trois points A, B et C.

3. Affirmation : La droite D est sécante avec la droite Δ qui a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -4 + 2t' \\ y = 1 - 3t' \\ z = 2 + t' \end{cases}$ $t' \in \mathbf{R}$

4. Affirmation : Le point F$(-3\,;-3\,;3)$ est le projeté orthogonal du point E$(-5\,;0\,;2)$ sur le plan P.

5. Affirmation : Il existe exactement une valeur du paramètre réel a telle que le plan P′ d'équation $-3x + y - a^2z + 3 = 0$ soit parallèle à la droite D.

Exercice 3 (5 points)

Dans cet exercice, les réponses seront arrondies à 10^{-4} près.

Durant la saison hivernale, la circulation d'un virus a entraîné la contamination de 2% de la population d'un pays. Dans ce pays, 90% de la population a été vaccinée contre ce virus. On constate que 62% des personnes contaminées avaient été vaccinées.

On interroge au hasard une personne, et on note les événements suivants :
C : « la personne a été contaminée »
V : « la personne a été vaccinée ».

Les événements contraires des événements C et V sont notés respectivement $\overline{C}$ et $\overline{V}$.

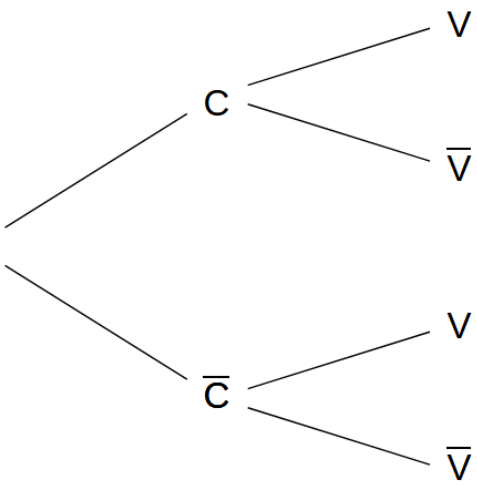
1. À partir de l'énoncé, donner, sans calcul, les probabilités $P(C)$, $P(V)$ et de la probabilité conditionnelle $P_C(V)$.

2.

a. Calculer $P(C \cap V)$.

b. En déduire $P(\overline{C} \cap V)$.

3. Recopier l'arbre des probabilités ci-dessous et le compléter.



4. Calculer $P_V(C)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse.

a. « Parmi les personnes non contaminées, il y a dix fois plus de personnes vaccinées que de personnes non vaccinées. »

b. « Plus de 98% de la population vaccinée n'a pas été contaminée. »

6. On s'intéresse à un échantillon de 20 personnes choisies au hasard dans la population. La population du pays est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce choix à des tirages successifs avec remise.
On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de personnes contaminées.

On rappelle que, pour une personne choisie au hasard, la probabilité d'être contaminée est $p=0,02$.

a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier et donner ses paramètres.

b. Calculer, en rappelant la formule, la probabilité que 4 personnes exactement soient contaminées dans ce groupe de 20 personnes.

Exercice 4 (5 points)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. Calculer w_0.

2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.

3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $l = l - \frac{1}{4}l$.
Déterminer la limite de la suite (u_n).

76 Asie - Jour 1 (25-MATJ1JA1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 16

L'usage de la calculatrice en mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Tous les exercices doivent être traités.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidates et les candidats sont invités à faire figurer sur leurs copies toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse.

EXERCICE 1 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$.

On considère :

- α un réel quelconque ;
- les points $A\,(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $B\,(2\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $C\,(\alpha\ ;\ 3\ ;\ \alpha)$;
- (d) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse,
puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 :

Pour toutes les valeurs de α, les points A, B et C définissent un plan et un vecteur normal à ce plan est $\vec{\jmath}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Affirmation 2 :

Il existe exactement une valeur du réel α telle que les droites (AC) et d sont parallèles.

Affirmation 3 :

Une mesure de l'angle $\widehat{OAB}$ est $135°$.

Affirmation 4 :

Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point H de coordonnées : $H(1\ ;\ 2\ ;\ 2)$.

Affirmation 5 :

La sphère de centre O et de rayon 1 rencontre la droite (d) en deux points distincts.
On rappelle que la sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance r de Ω.

EXERCICE 2 (5 points)

Une entreprise qui fabrique des jouets doit effectuer des contrôles de conformité avant leur commercialisation. Dans cet exercice, on s'intéresse à deux tests effectués par l'entreprise :
un test dit *de fabrication* et un test dit *de sécurité*.

À la suite d'un grand nombre de vérifications, l'entreprise affirme que :

- 95% des jouets réussissent le test de fabrication ;
- parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98% réussissent le test de sécurité ;
- 1% des jouets ne réussissent aucun des deux tests.

On choisit au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'événement : « le jouet réussit le test de fabrication » ;
- S l'événement : « le jouet réussit le test de sécurité ».

Partie A

1. À partir des données de l'énoncé, donner les probabilités $P(F)$ et $P_F(S)$.
2. (a) Construire un arbre pondéré qui illustre la situation avec les données disponibles dans l'énoncé.
   (b) Montrer que $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = 0{,}2$.
3. Calculer la probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests.
4. Montrer que la probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut $0{,}97$ arrondi au centième.
5. Lorsque le jouet a réussi le test de sécurité, quelle est la probabilité qu'il réussisse le test de fabrication ? Donner une valeur approchée du résultat au centième.

Partie B

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de n jouets, où n est un entier strictement positif. On suppose que ce prélèvement se fait sur une quantité suffisamment grande de jouets pour être assimilé à une succession de n tirages indépendants avec remise.

On rappelle que la probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication est égale à $0{,}95$.
Soit S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de jouets ayant réussi le test de fabrication. On admet que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}95$.

1. Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n en fonction de n.
2. Dans cette question, on pose $n = 150$.
   (a) Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(S_{150} = 145)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
   (b) Déterminer la probabilité qu'au moins 94% des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.
3. Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.
   Soit F_n la variable aléatoire définie par : $F_n = \dfrac{S_n}{n}$. La variable aléatoire F_n représente la proportion des jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets prélevés. On note $E(F_n)$ l'espérance et $V(F_n)$ la variance de la variable aléatoire F_n.
   (a) Montrer que $E(F_n) = 0{,}95$ et que $V(F_n) = \dfrac{0{,}0475}{n}$.
   (b) On s'intéresse à l'événement I suivant : « la proportion de jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets est strictement comprise entre 93% et 97% ». En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n de la taille du lot de jouets à prélever, à partir de laquelle la probabilité de l'événement I est supérieure ou égale à $0{,}96$.

EXERCICE 3 (5 points)

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 mL d'un médicament.
On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en mL, présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.
On a $u_1 = 2$ et pour tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1} = 2 + 0{,}8u_n$.

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1. Calculer la valeur u_2.
2. Montrer, par récurrence sur n, que $u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$ pour tout entier naturel n strictement positif.
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geq 10$ admet-elle des solutions ? Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.
On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n strictement positif,
$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n$$
3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.
4. On donne la fonction `mystere` suivante, écrite en langage Python.

```
1 def mystere(k):
2     n=1
3     s=2
4     while s<k :
5         n=n+1
6         s=10-40/n+(40*0.8**n)/n
7     return n
```

   Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?
5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et on appelle C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.
   (a) Montrer que $g'(x) = f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   (b) Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :
   $$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}$$
2. (a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
   (b) Interpréter graphiquement ce résultat.
3. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
   (c) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.
4. On pose $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)dx$.
   (a) Calculer I.
   (b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et que :
   $$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(x-3\sqrt{x}+3)}{8x^2\sqrt{x}}$$
   (a) En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   (b) Etudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

77 Asie - Jour 2 (25-MATJ2JA1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 16

L'usage de la calculatrice en mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Tous les exercices doivent être traités.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidates et les candidats sont invités à faire figurer sur leurs copies toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse.

EXERCICE 1 (5 points)

Toutes les probabilités, sauf indication contraire, seront arrondies à 10^{-3} dans cet exercice.

« Le virus du chikungunya, transmis à l'homme par la piqûre du moustique tigre provoque chez les patients des douleurs articulaires aiguës qui peuvent être persistantes. En 2005, une importante épidémie de chikungunya a touché les îles de l'Océan Indien et notamment l'île de La Réunion, avec plusieurs centaines de milliers de cas déclarés. En 2007, la maladie a fait son apparition en Europe, puis fin 2013, aux Antilles et a atteint le continent américain en 2014 ».
(https ://www.pasteur.fr/fr/centre-medical/fiches-maladies/chikungunya)

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus.
Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu atteint par le virus ait un test positif est de $0{,}999$;
- la probabilité qu'un individu non atteint par le virus ait un test positif est de $0{,}005$.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population cible.
Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'événement : « l'individu choisi est atteint du chikungunya ».
- T l'événement : « le test de l'individu choisi est positif ».

On considère que le test est *fiable* lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus est supérieure à $0{,}95$.

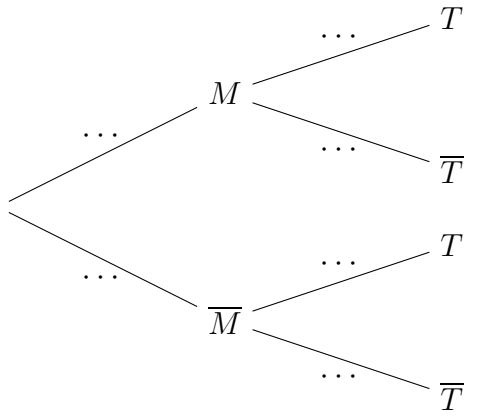
Partie A : Étude d'un exemple

1. Donner les probabilités $P_M(T)$ et $P_{\overline{M}}(T)$.

« En mars 2005, l'épidémie s'est propagée rapidement dans l'île de La Réunion, avec une flambée importante entre fin avril et début juin puis une persistance de la transmission virale durant l'hiver austral. Au total, 270 000 personnes ont été infectées pour une population totale de 750 000 individus ».
(https ://www.pasteur.fr/fr/centre-medical/fiches-maladies/chikungunya)
Fin 2005, le laboratoire a effectué un test de dépistage massif de la population de l'île de La Réunion.
Dans cette partie, la population cible est donc la population de l'île de La Réunion.

2. Donner la valeur exacte de $P(M)$.

3. Recopier et compléter l'arbre pondéré donné ci-dessous.



4. Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par le virus et ait un test positif.
5. Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif.
6. Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus.
7. Peut-on estimer que ce test est fiable ? Argumenter.

Partie B : Dépistage sur une population cible

Dans cette partie, on note p la proportion de personnes atteintes par le virus du chikungunya dans une population cible.
On cherche ici à tester la fiabilité du test de ce laboratoire en fonction de p.

1. Recopier, en l'adaptant, l'arbre pondéré de la question A3 en tenant compte des nouvelles données.
2. Exprimer la probabilité $P(T)$ en fonction de p.
3. Montrer que $P_T(M) = \dfrac{999p}{994p + 5}$.
4. Pour quelles valeurs de p peut-on considérer que ce test est fiable ?

Partie C : Étude sur un échantillon

Pendant l'épidémie, on admet que la probabilité d'être atteint du chikungunya sur l'île de La Réunion est de $0{,}36$.
On considère un échantillon de n individus choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant le nombre d'individus infectés dans cet échantillon parmi les n tirés au sort.
On admet que X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}36$.

Déterminer à partir de combien d'individus n la probabilité de l'événement « au moins un des n habitants de cet échantillon est atteint par le virus » est supérieure à $0{,}99$. Expliquer la démarche.

EXERCICE 2 (5 points)

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$.
Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Exprimer v_n en fonction de n pour tout n entier naturel.
4. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 + 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n). Justifier la réponse.

Partie B

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$$

1. Montrer que $w_1 = 44{,}5$.

On souhaite écrire une fonction `suite`, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-dessous une proposition pour cette fonction `suite`.

```
1  def suite(n):
2      U=30
3      W=45
4      for i in range (1,n+1):
5          U=U/2+10
6          W=W/2+U/2+7
7      return W
```

2. L'exécution de `suite`(1) ne renvoie pas le terme w_1. Comment modifier la fonction `suite` afin que l'exécution de `suite`(n) renvoie la valeur du terme w_n ?
3. (a) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel n on a :

$$w_n = 10\,n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 11\left(\frac{1}{2}\right)^n + 34$$

(b) On admet que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a : $0 \leq 10\,n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{n}$.

Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?

EXERCICE 3 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$.
On considère :

- les points $C\,(3\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $D\,(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $H\,(-6\ ;\ 2\ ;\ 2)$ et $J\left(\dfrac{-54}{13}\ ;\ \dfrac{62}{13}\ ;\ 0\right)$;
- le plan P d'équation cartésienne $2x+3y+6z-6=0$;
- le plan P' d'équation cartésienne $x-2y+3z-3=0$;
- la droite (d) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x &= -8+\dfrac{1}{3}t \\ y &= -1+\dfrac{1}{2}t \\ z &= -4+t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : La droite (d) est orthogonale au plan P et coupe ce plan en H.

Affirmation 2 : La mesure en degré de l'angle $\widehat{DCH}$, arrondie à 10^{-1}, est $17{,}3°$.

Affirmation 3 : Les plans P et P' sont sécants et leur intersection est la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3-3t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbf{R}$.

Affirmation 4 : Le point J est le projeté orthogonal du point H sur la droite (CD).

EXERCICE 4 (5 points)

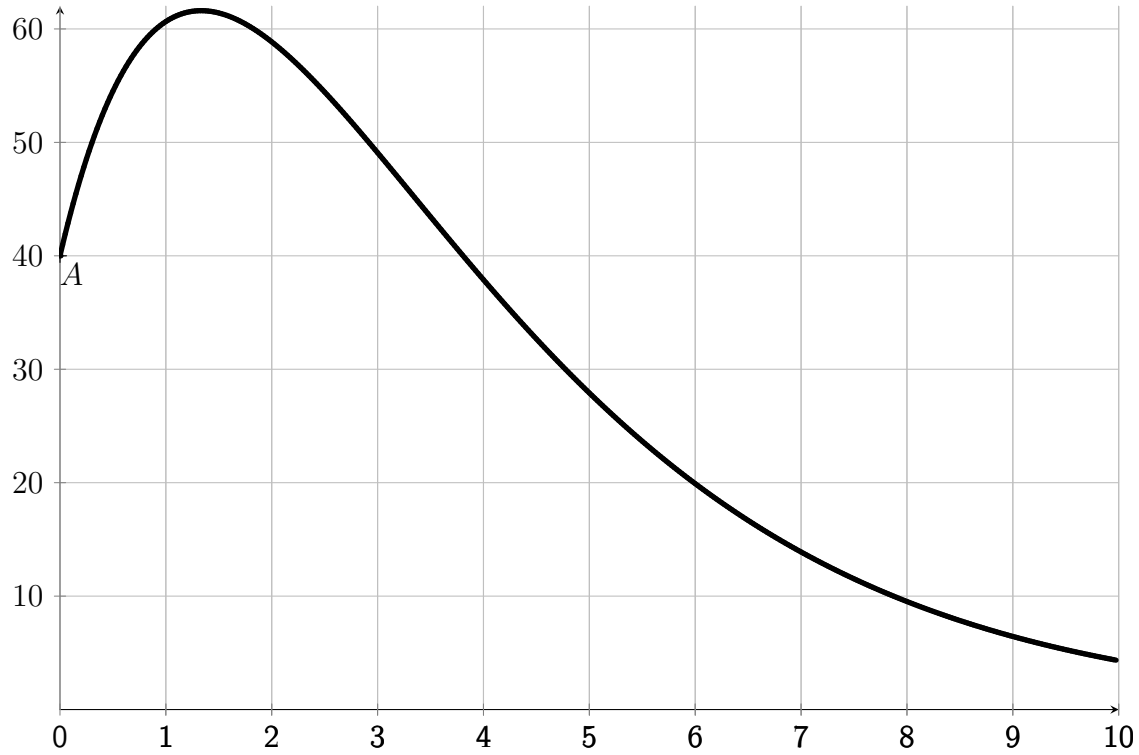
Dans un laboratoire, on étudie une réaction chimique dans un réacteur fermé, sous certaines conditions. Le traitement numérique des données expérimentales a permis de modéliser l'évolution de la température de cette réaction chimique en fonction du temps.
L'objectif de cet exercice est d'étudier cette modélisation.
La température est exprimée en degré Celsius et le temps est exprimé en minute.
Dans tout l'exercice, on se place sur l'intervalle de temps $[0\ ;10]$.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Dans un repère orthogonal du plan, on donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction température en fonction du temps sur l'intervalle $[0\ ;10]$.

1. Déterminer, par lecture graphique, au bout de combien de temps la température redescend à sa valeur initiale à l'instant $t = 0$.



On appelle f la fonction température représentée par la courbe ci-dessus.
On précise que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;10]$.
On admet que la fonction f peut s'écrire sous la forme $f(t) = (at + b)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ où a et b sont deux constantes réelles.

2. On admet que la valeur exacte de $f(0)$ est 40. En déduire la valeur de b.
3. On admet que f vérifie l'équation différentielle (E) : $y' + 0{,}5y = 60\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.
   Déterminer la valeur de a.

Partie B : Étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;10]$ par

$$f(t) = (60t + 40)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$$

1. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;10]$, on a : $f'(t) = (40 - 30t)\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$.
2. (a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;10]$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les images des valeurs présentes dans le tableau.

   (b) Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution α strictement positive sur l'intervalle $]0\,;10]$.

   (c) Donner une valeur approchée de α au dixième près et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
3. On définit la température moyenne, exprimée en degré Celsius, de cette réaction chimique entre deux temps t_1 et t_2, exprimés en minute, par

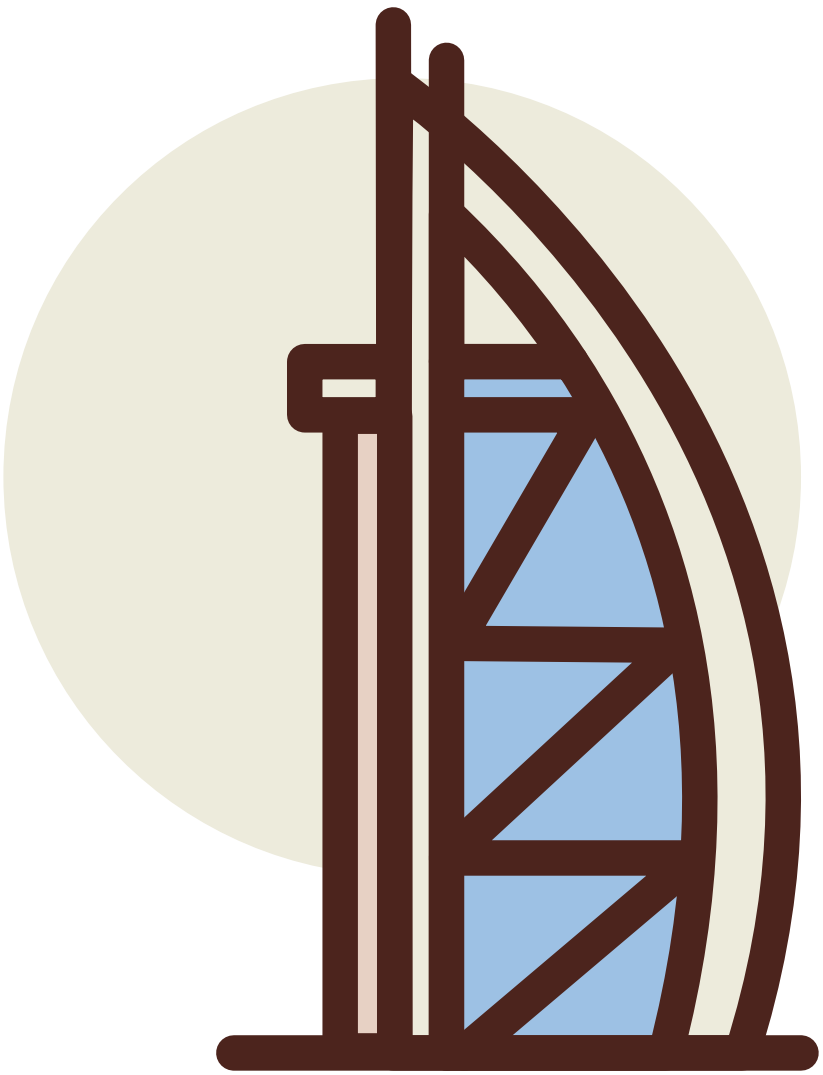
$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$$

   (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^4 f(t)dt = 320 - \frac{800}{\mathrm{e}^2}$$

   (b) En déduire une valeur approchée, au degré Celsius près, de la température moyenne de cette réaction chimique au cours des 4 premières minutes.

78 Centres Étrangers - Jour 1 (25-MATJ1G11)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (6 points)

Cet exercice est constitué de trois parties indépendantes.

Un magasin est équipé de caisses automatiques en libre-service où le client scanne lui-même ses articles. Le logiciel d'une caisse déclenche régulièrement des demandes de vérification. Un employé du magasin effectue alors un contrôle.

Partie A

Le contrôle peut être

- soit « total » : l'employé du magasin scanne alors à nouveau l'ensemble des articles du client ;
- soit « partiel » : l'employé choisit alors un ou plusieurs articles du client pour vérifier qu'ils ont bien été scannés.

Si un contrôle est déclenché, il s'agit une fois sur dix d'un contrôle total.
En cas de contrôle total, une erreur du client est détectée dans 30 % des cas.
En cas de contrôle partiel, il n'y a pas d'erreur détectée dans 85 % des cas.

Un contrôle est déclenché à une caisse automatique.
On considère les événements suivants :

- T : *« Le contrôle est un contrôle total »* ;
- E : « *Une erreur est détectée lors du contrôle* ».

On notera $\overline{T}$ et $\overline{E}$ les événements contraires de T et E.

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation puis déterminer $P(\overline{T} \cap E)$.

2. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors du contrôle.

3. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

Partie B

Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0{,}165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Déterminer la probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

3. Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

4. On souhaite modifier le nombre de contrôles déclenchés par la caisse de manière à ce que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.
   Déterminer le nombre de contrôles que doit déclencher la caisse chaque jour pour que cette contrainte soit respectée.

Partie C

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.
On admet que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;0{,}165)$.

1. Déterminer les valeurs exactes de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X_1.

2. On définit la variable aléatoire S par $S = X_1 + X_2 + X_3$.
   Justifier que $E(S) = 9{,}9$ et que $V(S) = 8{,}2665$.

3. Pour cette question, on utilisera 10 comme valeur de $E(S)$.
   À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est supérieure à $0{,}48$.

Exercice 2 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Les quatre questions sont indépendantes.

Dans tout l'exercice, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère :

- les points $A(-3; 1; 4)$ et $B(1; 5; 2)$
- le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $4x + 4y - 2z + 3 = 0$
- la droite (d) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -6 + 3t \\ y = 1 \\ z = 9 - 5t \end{cases}$, où $t \in \mathbb{R}$.

1. Les droites (AB) et (d) sont :
   a. sécantes non perpendiculaires.
   b. perpendiculaires.
   c. non coplanaires.
   d. parallèles.

2. La droite (AB) est :
   a. incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
   b. strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.
   c. sécante et non orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
   d. orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

3. On considère le plan $\mathcal{P}'$ d'équation cartésienne $2x + y + 6z + 5 = 0$.
   Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont :
   a. sécants et non perpendiculaires.
   b. perpendiculaires.
   c. confondus.
   d. strictement parallèles.

4. On considère le point $C(0; 1; -1)$. La valeur de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au degré est :
   a. $90°$
   b. $51°$
   c. $39°$
   d. $0°$

Exercice 3 (6 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x) = 4\ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en -1.
2. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[$, on a :
$$f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$
3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;6{,}5]$.

4. On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2\,;6{,}5]$ par $h(x) = f(x) - x$. On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2	$m \approx 2{,}364$	6,5
$h(x)$	$h(2)$	$M \approx 2{,}265$	$h(6{,}5)$

Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2;6{,}5]$.

5. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```
from math import*

def f(x):
    return(4*log(1+x)-(x**2)/25)

def bornes(n):
    p = 1/10**n
    x = 6
    while f(x)-x > 0 :
        x = x+p
    return (x-p,x)
```

On rappelle qu'en langage Python :

- *la commande* `log(x)` *renvoie la valeur* $\ln x$ *;*
- *la commande* `c**d` *renvoie la valeur de* c^d*.*

a. Donner les valeurs renvoyées par la commande `bornes(2)`. *On donnera les valeurs arrondies au centième.*
b. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

Partie B

*Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la **partie A**.*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel, $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6{,}5$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.

3. On rappelle que le réel α, défini dans la **partie A**, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2\,;6{,}5]$.
   Justifier que $\ell = \alpha$.

<u>Exercice 4</u> (4 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle (E_1) : $y' + 0{,}48y = \frac{1}{250}$ où y est une fonction de la variable t définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $h(t) = \frac{1}{120}$.
   Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1).

2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0{,}48y = 0$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture. À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de $30\,000$ bactéries dans le milieu. On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t, exprimé en heure. On a donc $p(0) = 30$.

On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p)$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty\,[$, on a $p(t) = \frac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2), alors y est solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' + 0{,}48y = \frac{1}{250}$.

2. On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1), alors $p = \frac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2). Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a :

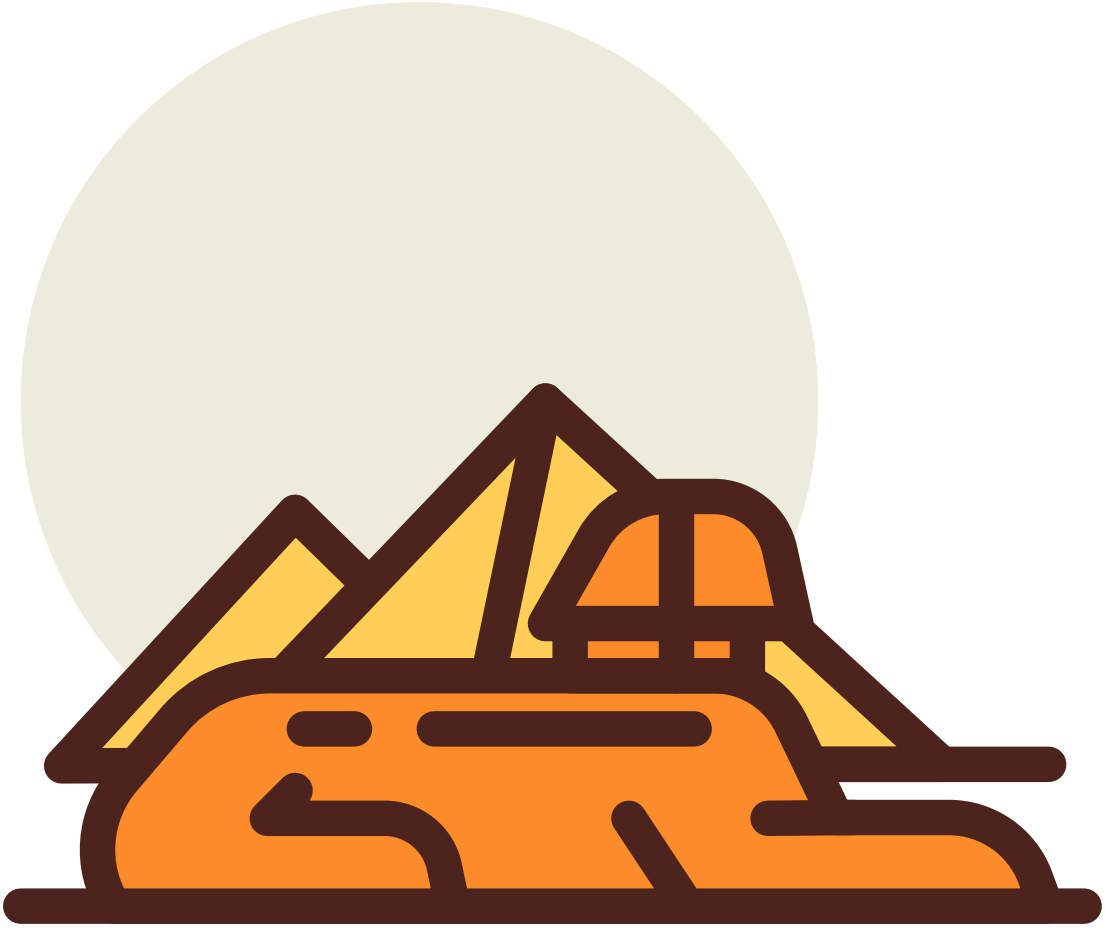
$$p(t) = \frac{120}{1+K\mathrm{e}^{-0{,}48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$

3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K.

4. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse $60\,000$ individus. *On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.*

79 Centres Étrangers - Jour 2 (25-MATJ2G11)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (6 points)

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B. Au 1er janvier 2025, on introduit $6\,000$ individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $0{,}93$. Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.
2. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.

On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par $v_0 = 6$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -0{,}05{v_n}^2 + 1{,}1v_n$.

Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en millier d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$.

2. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 11]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $2 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 6$.
4. En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.
5. **a.** Justifier que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ puis en déduire la valeur de ℓ.
   b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Cette partie a pour but de comparer l'évolution de la population dans les deux milieux.

1. En résolvant une inéquation, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu A sera strictement inférieure à 3 000 individus.
2. À l'aide de la calculatrice, déterminer l'année à partir de laquelle la population du milieu B sera strictement inférieure à 3 000 individus.
3. Justifier qu'à partir d'une certaine année, la population du milieu B dépassera la population du milieu A.
4. On considère le programme Python ci-contre.
   a. Recopier et compléter ce programme afin qu'après exécution, il affiche l'année à partir de laquelle la population du milieu B est strictement supérieure à la population du milieu A.
   b. Déterminer l'année affichée après exécution du programme.

```
n = 0
u = 6
v = 6
while ... :
    u = ...
    v = ...
    n = n + 1
print(2025 + n)
```

Exercice 2 (6 points)

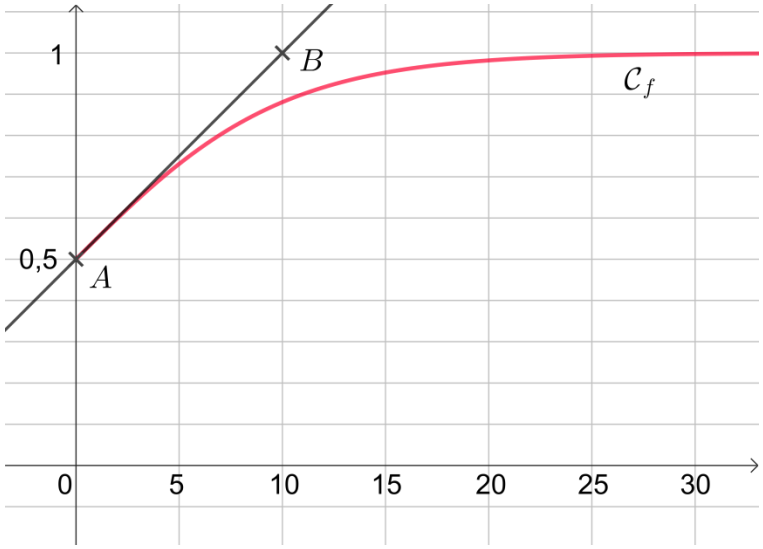
Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{a + \mathrm{e}^{-bx}}$$

où a et b sont deux constantes réelles strictement positives.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
La fonction f admet pour représentation graphique la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :



On considère les points $A(0; 0{,}5)$ et $B(10; 1)$.
On admet que la droite (AB) est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

1. Par lecture graphique, donner une valeur approchée de $f(10)$.
2. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
3. Justifier que $a = 1$.
4. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
5. **a.** Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x et de la constante b.
   b. En déduire la valeur de b.

Partie B

On admet, dans la suite de l'exercice, que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-0{,}2x}}$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α positif tel que $f(\alpha) = 0{,}97$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement du réel α par deux nombres entiers consécutifs.

Partie C

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$, $f(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1+\mathrm{e}^{0,2x}}$.
2. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0;40]$, c'est-à-dire :

$$I = \frac{1}{40}\int_0^{40} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}\,\mathrm{d}x$$

On donnera la valeur exacte et une valeur approchée au millième.

<u>Exercice 3</u> (4 points)

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64.
Par exemple, « gP3g » est une telle séquence.
Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3. **a.** Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule
   b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
   c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
   d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Partie B

On s'intéresse à la transmission d'une séquence de 250 caractères d'un ordinateur à un autre. On suppose que la probabilité qu'un caractère soit mal transmis est égale à $0{,}01$ et que les transmissions des différents caractères sont indépendantes entre elles.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de caractères mal transmis.

1. On admet que la variable aléatoire X suit la loi binomiale. Donner ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité que tous les caractères soient bien transmis. *On donnera l'expression exacte, puis une valeur approchée à 10^{-3} près.*
3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : « La probabilité que plus de 16 caractères soient mal transmis est négligeable » ?

Partie C

On s'intéresse maintenant à la transmission de 4 séquences de 250 caractères.
On note X_1, X_2, X_3 et X_4 les variables aléatoires correspondant aux nombres de caractères mal transmis lors de la transmission de chacune des 4 séquences. On admet que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes entre elles et suivent la même loi que la variable aléatoire X définie en **partie B**.
On note $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Déterminer, en justifiant, l'espérance et la variance de la variable aléatoire S.

Exercice 4 (4 points)

On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace.
On considère les points $A(1; 0; 3)$, $B(-2; 1; 2)$ et $C(0; 3; 2)$.

1. **a.** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC).
   c. En déduire que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $-x + y + 4z - 11 = 0$.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $3x - 3y + 2z - 9 = 0$ et le plan $\mathcal{P}'$ d'équation cartésienne $x - y - z + 2 = 0$.

2. **a.** Démontrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants. On note (d) leur droite d'intersection.
   b. Déterminer si les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires.
3. Montrer que la droite (d) est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
4. Montrer que le point $M(2; 1; 3)$ appartient aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
   En déduire une représentation paramétrique de la droite (d).
5. Montrer que la droite (d) est aussi incluse dans le plan (ABC).
   Que peut-on dire des trois plans (ABC), $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$?

80 Métropole - Jour 1 (25-MATJ1ME1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Mardi 17 juin 2025

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine : A, B, AB et O.

Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsqu'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif.

Au sein de la population française, on sait que :

- 45 % des individus appartiennent au groupe A, et parmi eux 85 % sont de rhésus positif ;
- 10 % des individus appartiennent au groupe B, et parmi eux 84 % sont de rhésus positif ;
- 3 % des individus appartiennent au groupe AB, et parmi eux 82 % sont de rhésus positif.

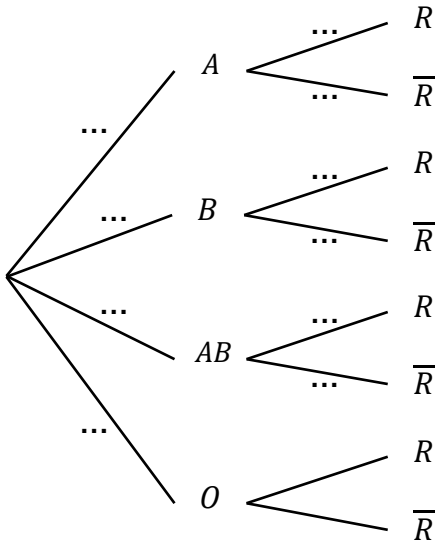
On choisit au hasard une personne dans la population française.

On désigne par :

- A l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin A » ;
- B l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin B » ;
- AB l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin AB » ;
- O l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin O » ;
- R l'évènement « La personne choisie a un facteur rhésus positif ».

Pour un événement quelconque E, on note $\overline{E}$ l'événement contraire de E et $P(E)$ la probabilité de E.

1. Recopier l'arbre ci-contre en complétant les dix pointillés.



2. Montrer que $P(B \cap R) = 0{,}084$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. On précise que $P(R) = 0{,}8397$.
Montrer que $P_O(R) = 0{,}83$.

4. On dit qu'un individu est « donneur universel » lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité.
Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique.
Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de $0{,}0714$.

5. Lors d'une collecte de sang, on choisit un échantillon de 100 personnes dans la population d'une ville française. Cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 personnes associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b. Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon.
c. Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à $7{,}14$ et que sa variance $V(X)$ est égale à $6{,}63$ à 10^{-2} près.

6. Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées $1, 2, 3, \ldots, N$ où N est un entier naturel non nul.
On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.
On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, …, X_N pour la ville N.

On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à $7{,}14$ et la même variance égale à $6{,}63$.
On considère la variable aléatoire $M_N = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_N}{N}$.

a. Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice ?
b. Calculer l'espérance $E(M_N)$.
c. On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N.
Montrer que $V(M_N) = \frac{6{,}63}{N}$.
d. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que :

$$P(7 < M_N < 7{,}28) \geq 0{,}95.$$

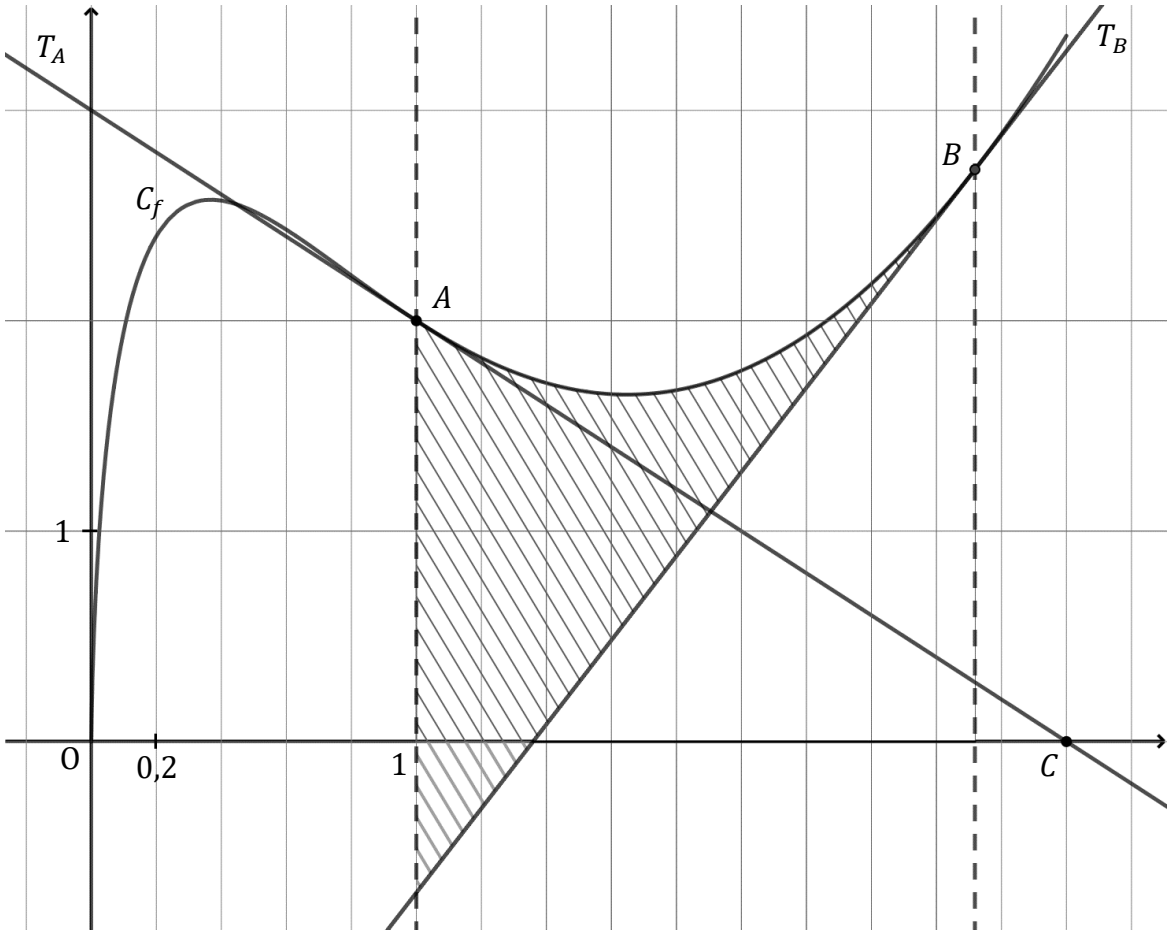
Exercice 2 (6 points)

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f, notée C_f, sur l'intervalle $]0\,;3]$;
- la droite T_A, tangente à C_f au point $A(1\,;2)$;
- la droite T_B, tangente à C_f au point $B(\mathrm{e}\,;\mathrm{e})$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3\,;0)$.



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0\,;3]$?

3. Quel est le signe de $f''(0{,}2)$?

Partie B : Etude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2)$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
En déduire que C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.

2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.
On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.

3. On admet que pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.

a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, $f''(x) = \frac{1}{x}(4\ln x + 1)$.

b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.

c. Montrer que la courbe C_f est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - \mathrm{e}$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\ dx = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f, la tangente T_B, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.
On admet que $\int_1^{\mathrm{e}} x(\ln x)^2\ dx = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$.
En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unité d'aire.

Exercice 3 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1. On considère les points $A(-1\,;\,0\,;\,5)$ et $B(3\,;\,2\,;\,-1)$.

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB).

2. On considère :

- la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$;
- la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z + 1 = 0$.
Affirmation 4 : La distance du point $C(2\ ;\ -1\ ;\ 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est égale à $2\sqrt{3}$.

Exercice 4 (5 points)

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.
La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024 + n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0{,}02u_n^2 + 1{,}3u_n.$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.

2. On note h la fonction définie sur $[0\ ;\ 20]$ par $h(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x$.
On admet que h est croissante sur $[0\ ;\ 20]$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.
c. Justifier que $\text{L} = 15$.

3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.

a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.

b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():
    n=0
    u=1
    while …… :
        n= ……
        u= ……
    return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t, en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est solution sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle $(E_1) : y' = 0{,}02y(15 - y)$.

On admet qu'une telle fonction f existe ; le but de cette partie est d'en déterminer une expression.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.
Montrer que g est solution de l'équation différentielle $(E_2) : y' = -0{,}3y + 0{,}02$.

2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2).

3. En déduire que pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:

$$f(t) = \frac{15}{14\mathrm{e}^{-0{,}3t} + 1}.$$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

81 Métropole - Jour 2 (25-MATJ2ME1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Mercredi 18 juin 2025

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)
Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Dans cet exercice, on s'intéresse à des personnes venues séjourner dans un centre multisports au cours d'un week-end.
Les résultats des probabilités demandées seront arrondis au millième si nécessaire.

Partie A

Le centre propose aux personnes venues pour un week-end une formule d'initiation au roller composée de deux séances de cours. On choisit au hasard une personne parmi celles ayant souscrit à cette formule.

On désigne par A et B les évènements suivants :

- A : « La personne chute pendant la première séance » ;
- B : « La personne chute pendant la deuxième séance ».

Pour un événement E quelconque, on note $P(E)$ sa probabilité et $\overline{E}$ son événement contraire.

Des observations permettent d'admettre que $P(A) = 0{,}6$.

De plus on constate que :

- Si la personne chute pendant la première séance, la probabilité qu'elle chute pendant la deuxième est de $0{,}3$;
- Si la personne ne chute pas pendant la première séance, la probabilité qu'elle chute pendant la deuxième est de $0{,}4$.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ et interpréter le résultat.

3. Montrer que $P(B) = 0{,}34$.

4. La personne ne chute pas pendant la deuxième séance de cours. Calculer la probabilité qu'elle n'ait pas chuté lors de la première séance.

5. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 personnes ayant souscrit à la formule, associe le nombre d'entre elles n'ayant chuté ni lors de la première ni lors de la deuxième séance. On assimile le choix d'un échantillon de 100 personnes à un tirage avec remise.
On admet que la probabilité qu'une personne ne chute ni lors de la première ni lors de la deuxième séance est de $0{,}24$.

a. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Quelle est la probabilité d'avoir, dans un échantillon de 100 personnes ayant souscrit à la formule, au moins 20 personnes qui ne chutent ni lors de la première ni lors de la deuxième séance ?

c. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On choisit au hasard une personne venue un week-end au centre multisports. On note T_1 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minute avant les accès aux activités sportives pendant la journée du samedi, et T_2 la variable aléatoire donnant son temps d'attente total en minute avant les accès aux activités sportives pendant la journée du dimanche.
On admet que :

- T_1 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_1) = 40$ et d'écart-type $\sigma(T_1) = 10$;
- T_2 suit une loi de probabilité d'espérance $E(T_2) = 60$ et d'écart-type $\sigma(T_2) = 16$;
- les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes.

On note T la variable aléatoire donnant le temps total d'attente avant les accès aux activités sportives lors des deux jours, exprimé en minute. Ainsi on a $T = T_1 + T_2$.

1. Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer que la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T est égale à 356.
3. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour une personne choisie au hasard parmi celles venues un week-end au centre multisports, la probabilité que son temps total d'attente T soit strictement compris entre 60 et 140 minutes est supérieure à $0{,}77$.

Exercice 2 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère :

- les points $A(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ -1\ ;\ 2)$ et $C(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} ;$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d' : \begin{cases} x = s \\ y = \frac{3}{2} + s \\ z = 3 - 2s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

Partie A

1. Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ 4\right)$.

2.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x + 2y + 4z - 7 = 0$$

c. Démontrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3.

a. Démontrer que le point $H(-1\,;0\,;2)$ est le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).

b. En déduire qu'il n'existe aucun point M du plan (ABC) tel que $SM < \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Partie B

On considère un point M appartenant au segment $[CS]$. On a donc $\overrightarrow{CM} = k\,\overrightarrow{CS}$ avec k réel de l'intervalle $[0\,;1]$.

1. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de k.

2. Existe-t-il un point M sur le segment $[CS]$ tel que le triangle MAB soit rectangle en M ?

Exercice 3 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{1+5^n}{2+3^n}.$$

Affirmation 1 : La suite (u_n) converge vers $\frac{5}{3}$.

2. On considère la suite (w_n) définie par :

$w_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3$.

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n, $w_n \geq n$.

3. On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ dont la courbe représentative C_f est donnée dans un repère orthonormé sur la figure (Fig. 1) en page 5. On précise que :

- T est la tangente à C_f au point A d'abscisse 8 ;
- L'axe des abscisses est la tangente horizontale à C_f au point d'abscisse 1.

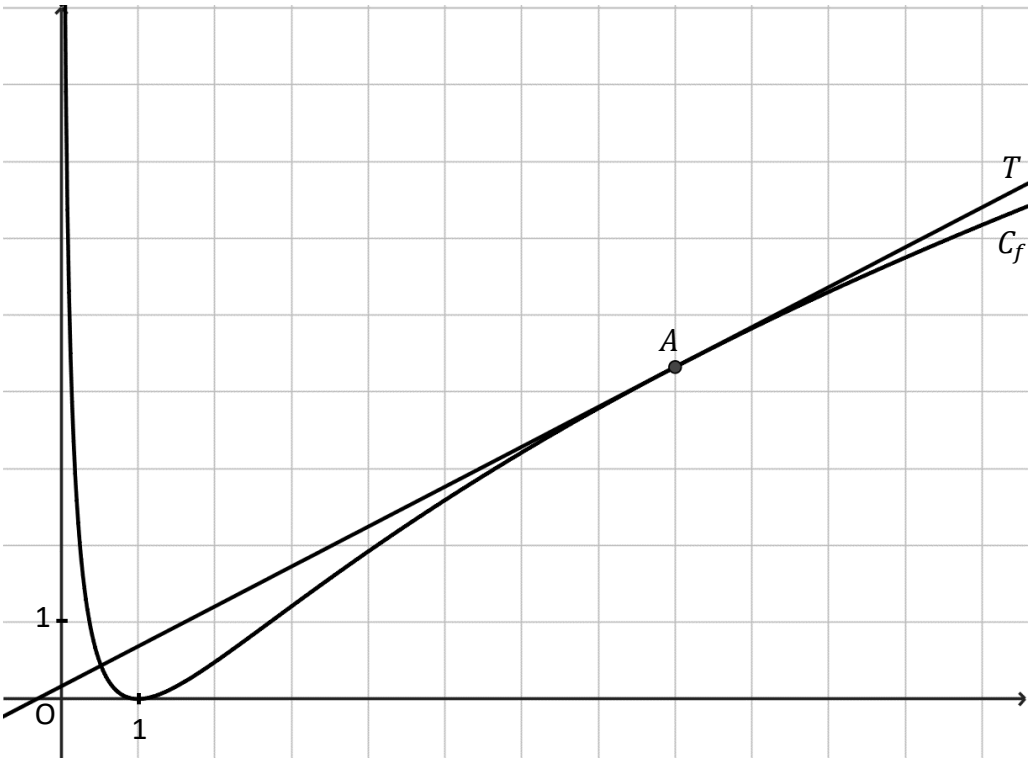


Fig. 1

Affirmation 3 : D'après le graphique, la fonction f est convexe sur son ensemble de définition.

4. **Affirmation 4 :** Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) - x + 1 \leq 0$, où ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 4 (6 points)

L'objet de cet exercice est l'étude de l'arrêt d'un chariot sur un manège, à partir du moment où il entre dans la zone de freinage en fin de parcours.

On note t le temps écoulé, exprimé en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.
On modélise la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage, exprimée en mètre, en fonction de t, à l'aide d'une fonction notée d définie sur $[0\,;+\infty[$.

On a ainsi $d(0) = 0$.

Par ailleurs, on admet que cette fonction d est dérivable sur son ensemble de définition. On note d' sa fonction dérivée.

Partie A

Sur la figure (Fig. 2) ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative C_d de la fonction d ;
- la tangente T à la courbe C_d au point A d'abscisse $4{,}7$;
- l'asymptote Δ à C_d en $+\infty$.

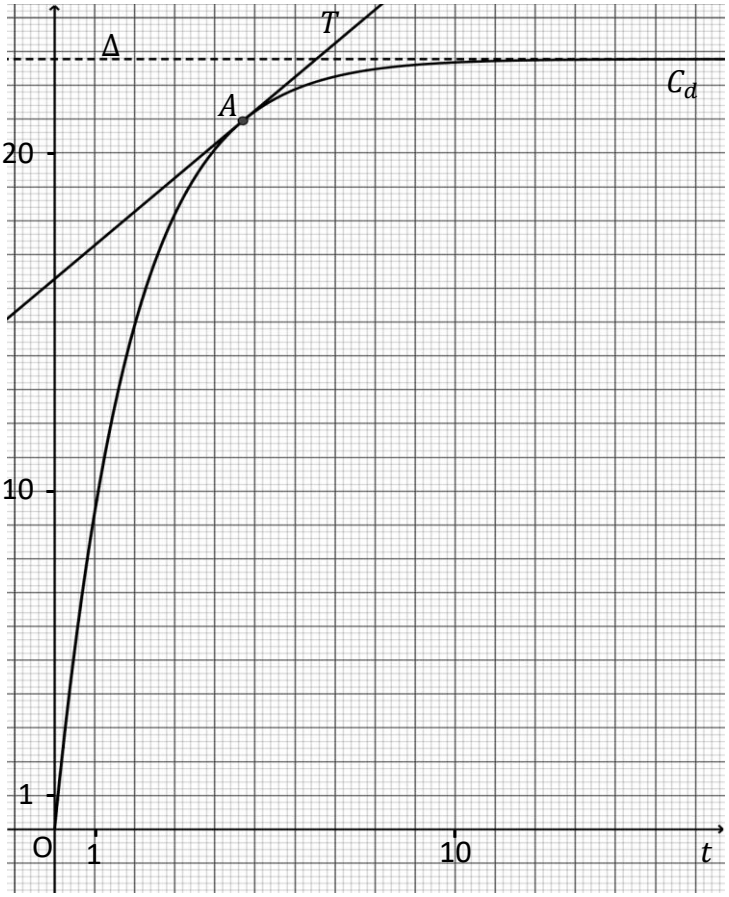


Fig. 2

Dans cette partie, aucune justification n'est attendue.

Avec la précision que permet le graphique, répondre aux questions ci-dessous.

D'après ce modèle :

1. Au bout de combien de temps le chariot aura-t-il parcouru 15 m dans la zone de freinage ?
2. Quelle longueur minimale doit-être prévue pour la zone de freinage ?
3. Que vaut $d'(4{,}7)$? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On rappelle que t désigne le temps écoulé, en seconde, à partir du moment où le chariot arrive sur la zone de freinage.
On modélise la vitesse instantanée du chariot, en mètre par seconde ($m.s^{-1}$), en fonction de t, par une fonction v définie sur $[0\,;+\infty[$.
On admet que :

- la fonction v est dérivable sur son ensemble de définition, et on note v' sa fonction dérivée ;
- la fonction v est une solution de l'équation différentielle (E) :
$$y' + 0{,}6y = \mathrm{e}^{-0{,}6t},$$
où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y.

On précise de plus que, lors de son arrivée sur la zone de freinage, la vitesse du chariot est égale à 12 m.s^{-1}, c'est-à-dire $v(0) = 12$.

1.

a. On considère l'équation différentielle (E') : $y' + 0{,}6y = 0$.
Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') sur $[0\,;+\infty[$.

b. Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = te^{-0{,}6t}$.
Vérifier que la fonction g est une solution de l'équation différentielle (E).

c. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0\,;+\infty[$.

d. En déduire que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on a :
$$v(t) = (12 + t)e^{-0{,}6t}.$$

2. Dans cette question, on étudie la fonction v sur $[0\,;+\infty[$.

a. Montrer que pour tout réel $t \in [0\,;+\infty[$, $v'(t) = (-6{,}2 - 0{,}6t)e^{-0{,}6t}$.

b. En admettant que :
$$v(t) = 12e^{-0{,}6t} + \frac{1}{0{,}6} \times \frac{0{,}6t}{e^{0{,}6t}},$$
déterminer la limite de v en $+\infty$.

c. Étudier le sens de variation de la fonction v et dresser son tableau de variation complet. Justifier.

d. Montrer que l'équation $v(t) = 1$ admet une solution unique α, dont on donnera une valeur approchée au dixième.

3. Lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde, un système mécanique se déclenche permettant son arrêt complet. Déterminer au bout de combien de temps ce système entre en action. Justifier.

Partie C

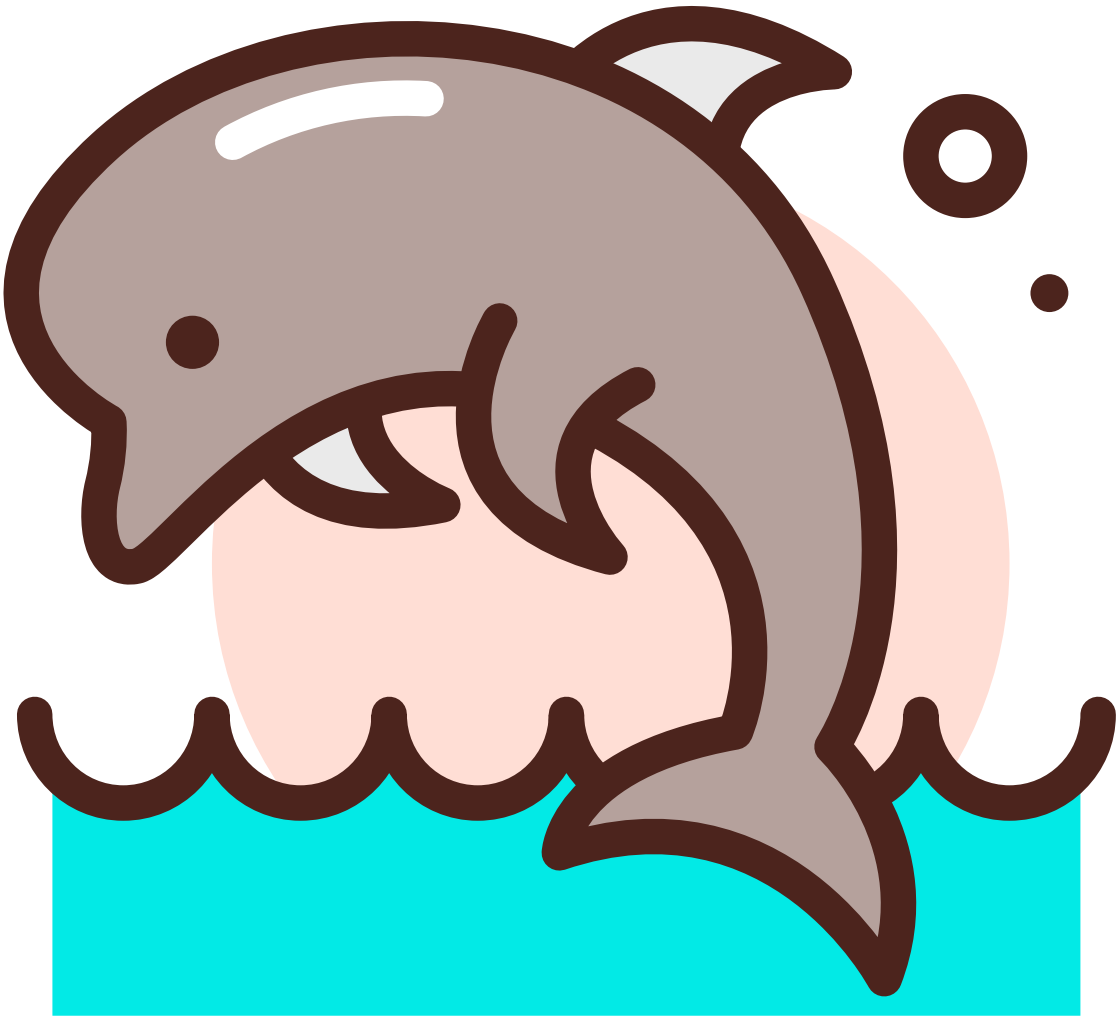
On rappelle que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:
$$v(t) = (12 + t)e^{-0{,}6t}.$$

On admet que pour tout réel t dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$:
$$d(t) = \int_0^t v(x)\,dx.$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la distance parcourue par le chariot entre les instants 0 et t est donnée par :
$$d(t) = e^{-0{,}6t}\left(-\frac{5}{3}t - \frac{205}{9}\right) + \frac{205}{9}.$$

2. On rappelle que le dispositif d'arrêt se déclenche lorsque la vitesse du chariot est inférieure ou égale à 1 mètre par seconde. Déterminer, selon ce modèle, une valeur approchée au centième de la distance parcourue par le chariot dans la zone de freinage avant le déclenchement de ce dispositif.

82 Polynésie - Jour 1 (25-MATJ1PO1)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1. (5 points)

Une équipe américaine a cartographié pour la première fois les allergies alimentaires chez l'enfant aux États-Unis en 2020. L'étude, publiée dans la revue *Clinical Pediatrics,* révèle une différence nette entre les zones rurales et les zones urbaines.

On sait qu'en 2020, 17 % de la population des États-Unis habite en zone rurale et 83 % en zone urbaine.

L'étude menée montre que parmi les enfants des États-Unis vivant en zone rurale, il y en a 6,2 % qui sont atteints d'allergie alimentaire.

Pour un événement E quelconque, on note $P(E)$ sa probabilité et $\bar{E}$ son événement contraire.

Sauf mention contraire, les probabilités seront données sous forme exacte.

Partie A.

On interroge au hasard un enfant dans la population des États-Unis et on note :

- R L'événement : « l'enfant interrogé habite en zone rurale » ;
- A L'événement : « l'enfant interrogé est atteint d'allergie alimentaire ».

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité. Cet arbre pourra être complété par la suite.

2. a. Calculer la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone rurale et soit atteint d'allergie alimentaire.

b. En déduire la probabilité que l'enfant interrogé habite en zone urbaine et soit atteint d'allergie alimentaire.

c. L'enfant interrogé habite en zone urbaine. Quelle est la probabilité qu'il soit atteint d'allergie alimentaire ? Arrondir le résultat à 10^{-4}.

Partie B.

L'étude révèle aussi que 9 % des enfants des États-Unis sont atteints d'allergie alimentaire. On réalise une étude en interrogeant au hasard 100 enfants des États-Unis.

On admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'enfants atteints d'allergie alimentaire dans l'échantillon considéré.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Quelle est la probabilité qu'au moins 10 enfants parmi les 100 interrogés soient atteints d'allergie alimentaire ? Arrondir le résultat à 10^{-4}.

Partie C.

On s'intéresse à un échantillon de 20 enfants atteints d'allergie alimentaire choisis au hasard.

L'âge d'apparition des premiers symptômes allergiques de ces 20 enfants est modélisé par les variables aléatoires $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$. On admet que ces variables aléatoires sont indépendantes et suivent la même loi d'espérance 4 et de variance 2,25.

On considère la variable aléatoire :

$$M_{20} = \frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_{20}}{20}$$

1. Que représente la variable aléatoire M_{20} dans le contexte de l'exercice ?
2. Déterminer l'espérance et la variance de M_{20}.
3. Justifier, à l'aide de l'inégalité de concentration, que

$$P(2 < M_{20} < 6) > 0{,}97.$$

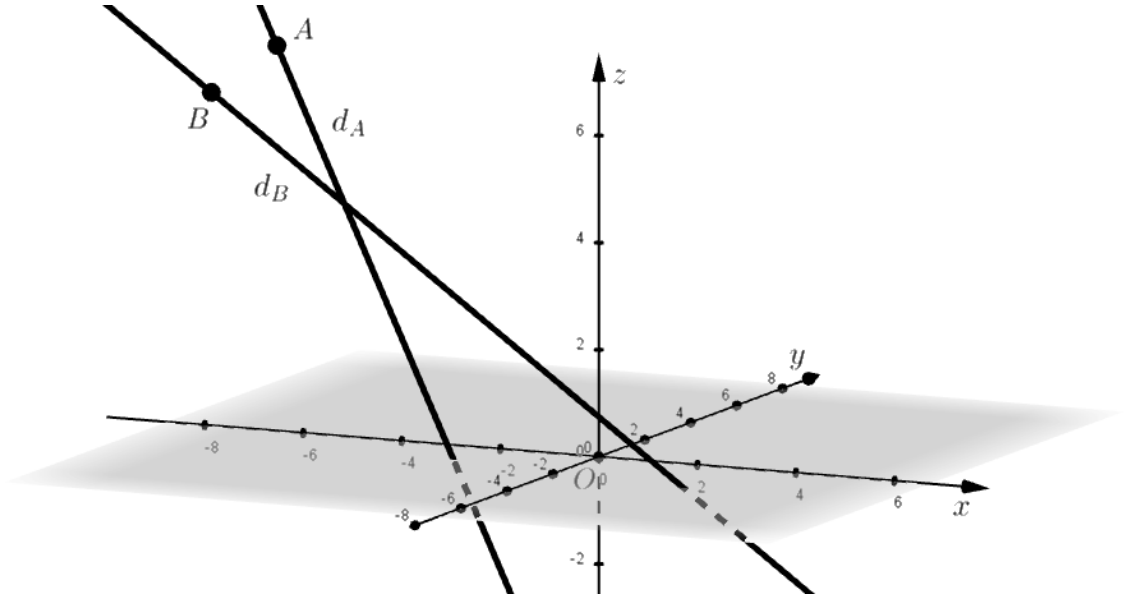
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2. (5 points)

Deux avions sont en approche d'un aéroport.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ dont l'origine O est le pied de la tour de contrôle, et le sol est le plan P_0 d'équation $z = 0$.
L'unité des axes correspond à 1 km.

On modélise les avions par des points.



L'avion Alpha transmet à la tour sa position en $A(-7\ ;\ 1\ ;\ 7)$ et sa trajectoire est dirigée par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$

L'avion Bêta transmet une trajectoire définie par la droite d_B passant par le point B dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases}x = -11 + 5t\\y = -5 + t\\z = 11 - 4t\end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

1. S'il ne dévie pas de sa trajectoire, déterminer les coordonnées du point S en lequel l'avion Bêta touchera le sol.

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d_A caractérisant la trajectoire de l'avion Alpha.

b. Les deux avions peuvent-ils entrer en collision ?

3. a. Démontrer que l'avion Alpha passe par la position $E(-3\ ;\ -1\ ;\ 1)$.

b. Justifier qu'une équation cartésienne du plan P_E passant par E et perpendiculaire à la droite d_A est :

$$2x - y - 3z + 8 = 0.$$

c. Vérifier que le point $F(-1;-3;3)$ est le point d'intersection du plan P_E et de la droite d_B.

d. Calculer la valeur exacte de la distance EF, puis vérifier que cela correspond à une distance de 3464 m, à 1 m près.

4. La réglementation aérienne stipule que deux avions en approche doivent être à tout instant à au moins 3 milles nautiques l'un de l'autre (1 mille nautique vaut 1 852 m). Si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au même instant, leur distance de sécurité est-elle respectée ?

Exercice 3. (5 points)

On munit le plan d'un repère orthonormé.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f_0(x) = \mathrm{e}^{-x} \text{ et, pour } n \geq 1,\ f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}\ .$$

Pour tout entier naturel n, on note C_n la courbe représentative de la fonction f_n.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geq 1$

On considère un entier naturel $n \geq 1$.

1. a. On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$f_n'(x) = (n - x)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

b. Justifier tous les éléments du tableau ci-dessous :

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$	↘	0

2. Justifier par le calcul que le point $A\ (1;\ \mathrm{e}^{-1})$ appartient à la courbe C_n.

Partie B : Étude des intégrales $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n \geq 0$

Dans cette partie, on étudie les fonctions f_n sur $[0 ; 1]$ et on considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. Sur le graphique en **ANNEXE (page 9/9),** on a représenté les courbes C_0, C_1, C_2, C_{10} et C_{100}.

a. Donner une interprétation graphique de I_n.

b. Par lecture de ce graphique, quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite (I_n) ?

2. Calculer I_0.

3. a. Soit n un entier naturel.
Démontrer que pour tout $x \in [0 ; 1]$,

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n.$$

b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

4. Démontrer que la suite (I_n) est convergente, vers une limite positive ou nulle que l'on notera ℓ.

5. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}$$

6. **a.** Démontrer que si $\ell > 0$, l'égalité de la question 5 conduit à une contradiction.
b. Démontrer que $\ell = 0$. On pourra utiliser la question **6.a.**.

On donne ci-dessous le script de la fonction `mystere`, écrite en langage Python. On a importé la constante e.

```
def mystere(n):
    I = 1 - 1/e
    L = [I]
    for i in range(n):
        I = (i + 1)*I - 1/e
        L.append(I)
    return L
```

7. Que renvoie `mystere(100)` dans le contexte de l'exercice ?

Exercice 4. (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes les unes des autres.

1. On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' = \frac{1}{2}y + 4.$$

Affirmation 1 : Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 8, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

2. Dans une classe de terminale, il y a 18 filles et 14 garçons.
On constitue une équipe de volley-ball en choisissant au hasard 3 filles et 3 garçons.
Affirmation 2 : Il y a 297 024 possibilités pour former une telle équipe.

3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{n}{2+\cos(n)}.$$

Affirmation 3 : La suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

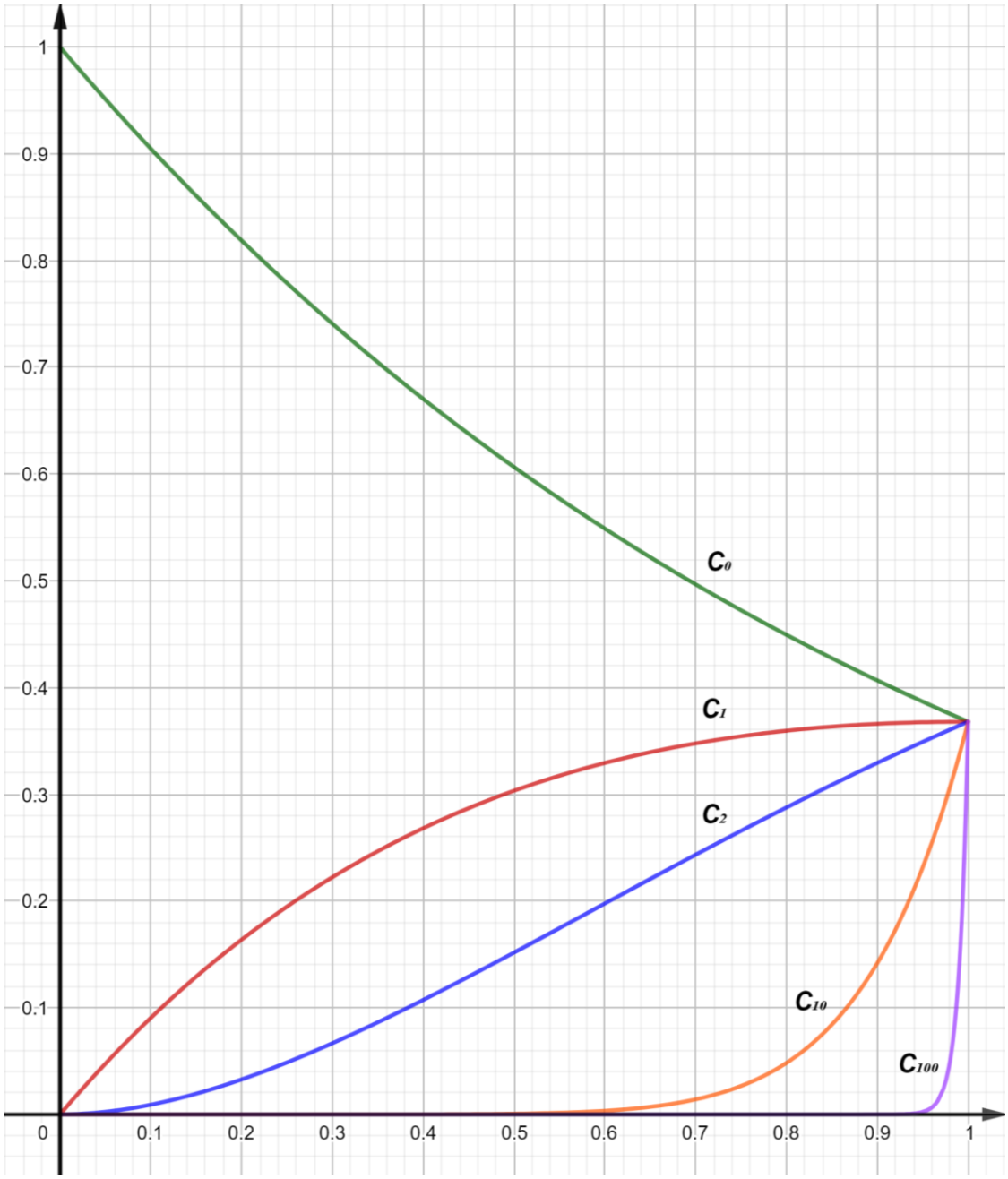
4. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points $A\ (1; 1; 2)$, $B\ (5; -1; 8)$ et $C\ (2; 1; 3)$.
Affirmation 4 : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 10$ et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est 30°.

5. On considère une fonction h définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ dont la dérivée seconde est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$h''(x) = x\ln x - 3x.$$

Affirmation 5 : La fonction h est convexe sur $[\mathrm{e}^3\ ;\ +\infty[$.

ANNEXE exercice 3.



83 Polynésie - Jour 2 (25-MATJ2PO1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1. (5 points)

Dans tout l'exercice, les probabilités seront, si nécessaire, arrondies à 10^{-3} près.

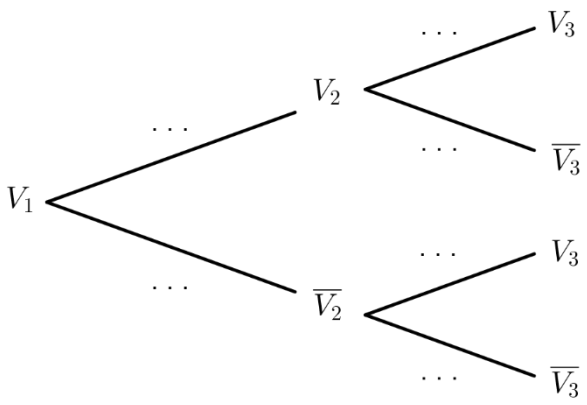
Une donnée binaire est une donnée qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.
Une donnée de ce type est transmise successivement d'une machine à une autre.
Chaque machine transmet la donnée reçue soit de manière fidèle, c'est-à-dire en transmettant l'information telle qu'elle l'a reçue (1 devient 1 et 0 devient 0), soit de façon contraire (1 devient 0 et 0 devient 1).
La transmission est fidèle dans 90% des cas, et donc contraire dans 10% des cas.
Dans tout l'exercice, la première machine reçoit toujours la valeur 1.

Partie A

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note :

- V_n l'événement : « la n-ième machine détient la valeur 1 » ;
- $\overline{V_n}$ l'événement : « la n-ième machine détient la valeur 0 ».

1. a. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



b. Démontrer que $P(V_3) = 0{,}82$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Sachant que la troisième machine a reçu la valeur 1, calculer la probabilité que la deuxième machine ait aussi reçu la valeur 1.

2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note $p_n = P(V_n)$.
La première machine a reçu la valeur 1, on a donc $p_1 = 1$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}1.$$

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$p_n = 0{,}5 \times 0{,}8^{n-1} + 0{,}5.$$

c. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Pour modéliser en langage Python la transmission de la donnée binaire décrite en début d'exercice, on considère la fonction `simulation` qui prend en paramètre un entier naturel `n` qui représente le nombre de transmissions réalisées d'une machine à une autre, et qui renvoie la liste des valeurs successives de la donnée binaire.

On donne ci-dessous le script incomplet de cette fonction.
On rappelle que l'instruction `rand()` renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle [0,1[.

```
1       def simulation(n):
2           donnee = 1
3           liste = [donnee]
4           for k in range(n):
5               if rand() < 0.1 :
6                   donnee = 1 - donnee
7               liste.append(donnee)
9           return liste
```

Par exemple, `simulation(3)` peut renvoyer `[1, 0, 0, 1]`. Cette liste traduit :

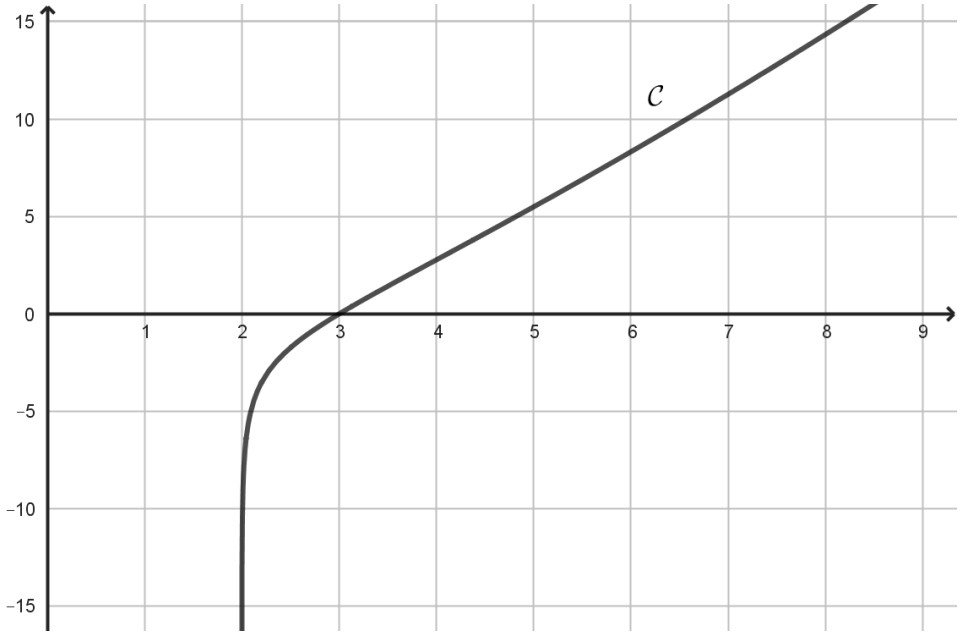
- qu'une donnée binaire a été successivement transmise trois fois entre quatre machines ;
- la première machine qui détient la valeur 1 a transmis de façon contraire cette donnée à la deuxième machine ;
- la deuxième machine a transmis la donnée qu'elle détient de façon fidèle à la troisième ;
- la troisième machine a transmis de façon contraire la donnée qu'elle détient à la quatrième.

1. Déterminer le rôle des instructions des lignes 5 et 6 de l'algorithme ci-dessus.

2. Calculer la probabilité que `simulation(4)` renvoie la liste `[1, 1, 1, 1, 1]` et la probabilité que `simulation(6)` renvoie la liste `[1, 0, 1, 0, 0, 1, 1]`.

Exercice 2. (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x-2)$.
Une partie de la courbe représentative C de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de *f*, ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2\,;\,+\infty[$.

3. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$. Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question **1.** ?

4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}.$$

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.

a. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

b. On admet que $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2\,;\,+\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g.

c. En déduire que, pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$.

d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$.

6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2\,;\,+\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 ?

Exercice 3. (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les points suivants :

$$A(1\,;3\,;0), B(-1\,;4\,;5), C(0\,;1\,;0) \text{ et } D(-2\,;2\,;1).$$

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

3. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

b. Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$2x - y + z + 1 = 0.$$

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. On appelle H le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}\,;\frac{4}{3}\,;\frac{5}{3}\right)$.

Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}B \times h$, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est sa hauteur relative à cette base.

a. Montrer que $DH = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

b. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.

6. On considère la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = \quad -3k \\ z = 1 + k \end{cases}, \text{ où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

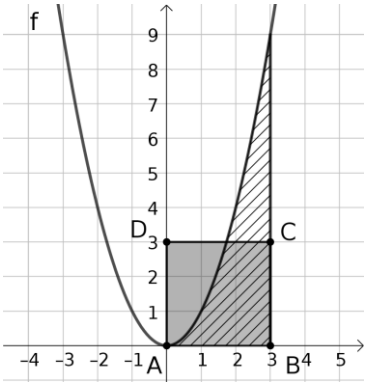
Exercice 4. (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soient E et F les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Affirmation n°1 : Il y a davantage de 3 −uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F.

2. Dans le repère orthonormé ci-contre, on a représenté la fonction carré, notée f, ainsi que le carré ABCD de côté 3.
Affirmation n°2 : La zone hachurée et le carré ABCD ont la même aire.



3. On considère l'intégrale I ci-dessous :

$$J = \int_1^2 x \ln(x)\, \mathrm{d}x.$$

Affirmation n°3 : Une intégration par parties permet d'obtenir : $J = \frac{7}{11}$.

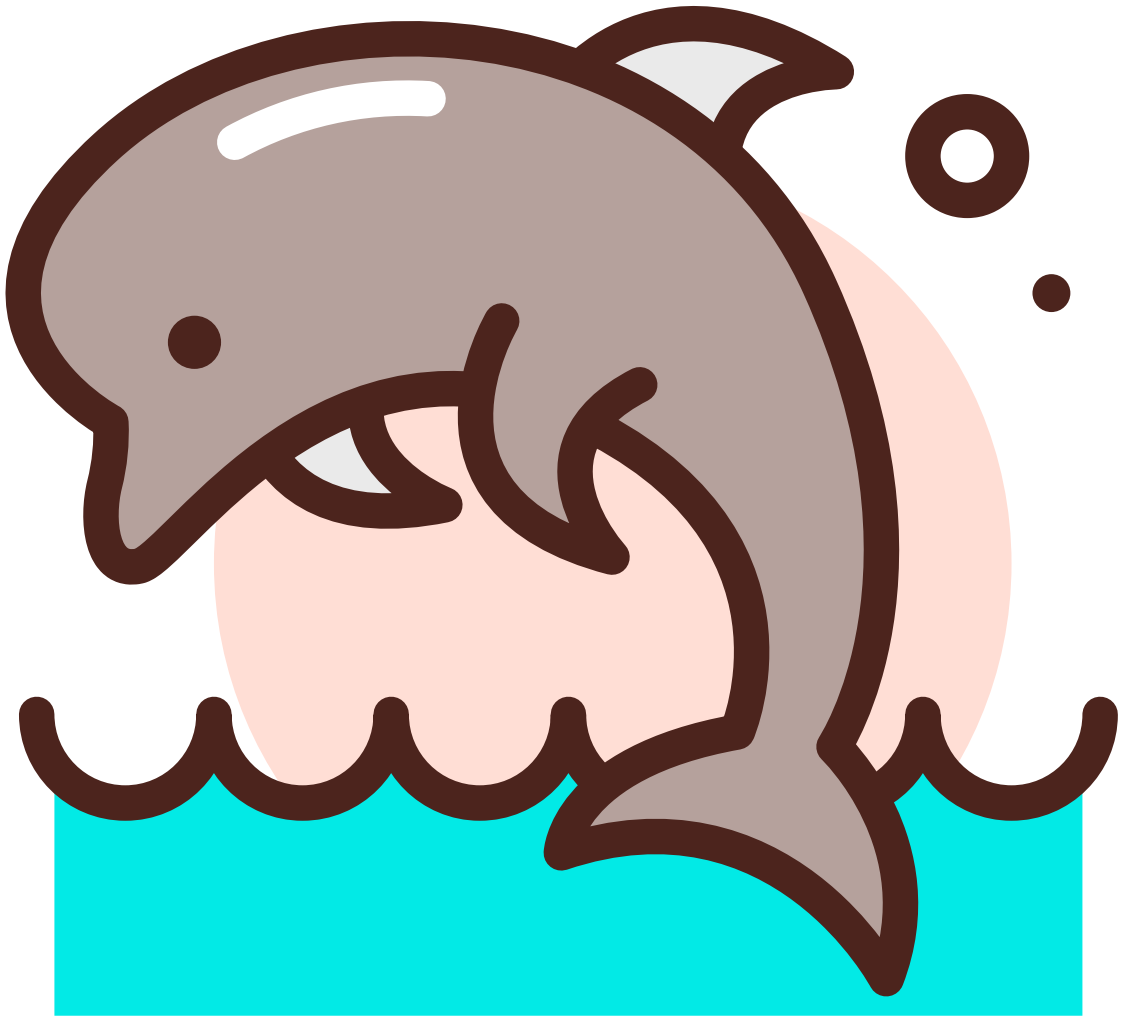
4. Sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y - \mathrm{e}^x$.
Affirmation n°4 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$ est solution de l'équation différentielle (E).

5. Soit x donné dans [0,1[. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (x - 1)\mathrm{e}^n + \cos(n).$$

Affirmation n°5 : La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

84 Polynésie - Jour 1 Remplacement (25-MATJ1PO3)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.

Sauf mention contraire, toute réponse devra être justifiée.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1. (5 points)

En France il y a deux formules pour obtenir le permis de conduire :

- Suivre à partir de 15 ans une formation de conduite accompagnée pendant 2 ans ;
- Suivre la formation classique (sans conduite accompagnée) à partir de 17 ans.

En France actuellement, parmi les jeunes qui suivent une formation au permis de conduire, 16 % choisissent la formation de conduite accompagnée, et parmi eux, 74,7% réussissent l'examen de conduite dès leur première tentative.
En suivant la formation classique, le taux de réussite dès la première tentative est seulement de 56,8 %.

On choisit au hasard un jeune français qui a déjà passé l'examen de conduite et on considère les événements A et R suivants :

- A : « le jeune a suivi la formation de conduite accompagnée » ;
- R : « le jeune a eu le permis dès sa première tentative ».

On arrondira les résultats à 10^{-3} près, si nécessaire.

Partie A :

1. Dresser un arbre de probabilités modélisant cette situation.
2. **a.** Démontrer que $P(\mathrm{R}) = 0{,}59664$.
   Dans la suite, on gardera la valeur 0,597 arrondie à 10^{-3} près.
   b. Donner ce résultat en pourcentage et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. On choisit un jeune ayant eu son permis dès sa première tentative. Quelle est la probabilité qu'il ait suivi la formation de conduite accompagnée ?
4. Quelle devrait être la proportion de jeunes suivant la formation de conduite accompagnée si on voulait que le taux de réussite global (quelle que soit la formation choisie) dès la première tentative à l'examen de conduite dépasse 70 % ?

Partie B :

Une auto-école présente pour la première fois à l'examen de conduite 10 candidats qui ont suivi la formation de conduite accompagnée. On modélise le fait de passer les examens de conduite par des épreuves aléatoires indépendantes.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces 10 candidats qui auront leur permis dès la première tentative.

1. Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}747$.
2. Calculer $P(X \geq 6)$. Interpréter ce résultat.
3. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

4. Il y a aussi 40 candidats qui n'ont pas suivi la formation de conduite accompagnée et qui se présentent pour la première fois à l'examen de conduite. De la même manière, on note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de ces candidats qui auront le permis à la première tentative. On admet que Y est indépendante de la variable X et qu'en fait $E(Y) = 22{,}53$ et $V(Y) = 9{,}81$.

On note alors Z la variable aléatoire comptant le nombre total de candidats (parmi les 50) qui auront le permis de conduire dès la première tentative dans cette auto-école.

a. Exprimer Z en fonction de X et Y. En déduire $E(Z)$ et $V(Z)$.

b. En utilisant l'inégalité de Bienaymé -Tchebychev, montrer que la probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats qui aient leur permis dès la première tentative est inférieure à 0,12.

Exercice 2. (5 points)

On étudie l'évolution de la population d'une espèce animale au sein d'une réserve naturelle.
Les effectifs de cette population ont été recensés à différentes années. Les données collectées sont présentées dans le tableau suivant :

Année	2000	2005	2010	2015
Nombre d'individus	50	64	80	100

Pour anticiper l'évolution de cette population, la direction de la réserve a choisi de modéliser le nombre d'individus en fonction du temps.
Pour cela, elle utilise une fonction, définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, dont la variable x représente le temps écoulé, en année, à partir de l'année 2000.
Dans son modèle, l'image de 0 par cette fonction vaut 50, ce qui correspond au nombre d'individus en l'an 2000.

Partie A. Modèle 1

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0{,}05y - 0{,}5 \quad (E_1)$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) avec la condition initiale $y(0) = 50$.
2. Comparer les résultats du tableau avec ceux que l'on obtiendrait avec ce modèle.

Partie B. Modèle 2

Dans cette partie, la direction de la réserve fait l'hypothèse que la fonction cherchée satisfait l'équation différentielle suivante :

$$y' = 0{,}05y(1 - 0{,}00125y) \quad (E_2)$$

On note f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{800}{1 + 15\mathrm{e}^{-0{,}05x}}$$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants.

Pour toute la suite de l'exercice, on pourra utiliser ces résultats sans les démontrer, sauf pour la question 5.

	Instruction	Résultat
1	$f(x) \coloneqq \dfrac{800}{1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x}}$	$f(x) = \dfrac{800}{1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x}}$
2	$f'(x) \coloneqq$ Dérivée $\big(f(x)\big)$	$f'(x) = \dfrac{6\,00\mathrm{e}^{-0{,}05x}}{(1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x})^2}$
3	$f''(x) \coloneqq$ Dérivée $(f'(x))$	$f''(x) = \dfrac{30\mathrm{e}^{-0{,}05x}}{(1+15\mathrm{e}^{-0{,}05x})^3}(15\mathrm{e}^{-0{,}05x}-1)$
4	Résoudre $(15\mathrm{e}^{-0{,}05x}-1 \geq 0)$	$x \leq 20\ln(15)$

1. Démontrer que la fonction f vérifie $f(0) = 50$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 0{,}05f(x)\big(1-0{,}00125f(x)\big)$$

On admet que cette fonction f est l'unique solution de (E_2) prenant la valeur initiale de 50 en 0.

2. Avec ce nouveau modèle f, estimer l'effectif de cette population en 2050. Arrondir le résultat à l'unité.

3. Calculer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire quant à la courbe C ? Interpréter cette limite dans le cadre de ce problème concret.

4. Justifier que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.

5. Démontrer le résultat obtenu en ligne 4 du logiciel.

6. On admet que la vitesse de croissance de la population de cette espèce, exprimée en nombre d'individus par an, est modélisée par la fonction f'.

a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe C.

b. La direction de la réserve affirme :

« Au vu de ce modèle, la vitesse de croissance de la population de cette espèce va augmenter pendant un peu plus de cinquante ans, puis va diminuer ».

La direction a-t-elle raison ? Justifier.

Exercice 3. (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2 + \ln(u_n^2 - 3).$$

On admet que cette suite est bien définie.

Partie A : Exploitation de programmes Python

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour que `suite(k)` qui prend en paramètre un entier naturel k, renvoie la liste des k premières valeurs de la suite (u_n).

Remarque : On précise que, pour tout réel strictement positif a, `log(a)` renvoie la valeur du logarithme népérien de a.

```
def suite(k):
    L = []
    u = 5
    for i in range(……):
        L.append(u)
        u= ……
    return(……)
```

2. On a exécuté `suite(9)` ci-dessous. Émettre deux conjectures : l'une sur le sens de variation de la suite (u_n) et l'autre sur son éventuelle convergence.

```
>>> suite(9)
[5, 5.091042453358316, 5.131953749864703,
  5.150037910978289, 5.157974010229213, 5.1614456706362954,
  5.162962248594583, 5.163624356938671, 5.163913344065642]
```

3. On a ensuite créé la fonction `mystere(n)` donnée ci-dessous et exécuté `mystere(10000)` ce qui a renvoyé 1.
   Cet affichage contredit-il la conjecture émise sur le sens de variation de la suite (u_n) ? Justifier.

```
def mystere(n):
    L = suite(n)
    c = 1
    for i in range(n - 1):
        if L[i] > L[i + 1]:
            c = 0
    return c
```

```
>>> mystere(10000)
1
```

Partie B : Étude de la convergence de la suite (u_n)

On considère la fonction g définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = 2 + \ln(x^2 - 3)$$

On admet que g est dérivable sur $[2\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Démontrer que la fonction g est croissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.
2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$$4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6.$$
b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie C : Étude de la valeur de la limite

On considère la fonction f définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = 2 + \ln(x^2 - 3) - x.$$

On admet que f est dérivable sur $[2\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On donne le tableau de variations de f suivant. On ne demande aucune justification.

x	2		3		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$\ln(6) - 1$	↘	$-\infty$

1. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[2\ ;\ +\infty[$ que l'on notera α et β avec $\alpha < \beta$.
b. Donner la valeur exacte de α et une valeur approchée à 10^{-3} près de β.

2. On note ℓ la limite de la suite (u_n).
Justifier que $f(\ell) = 0$ et déterminer ℓ.

Exercice 4. (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$.

Affirmation 1 :

$$\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$$

2. Soient n et k deux entiers naturels non nuls tels que $k \leq n$.

Affirmation 2 :

$$n \times \binom{n-1}{k-1} = k \times \binom{n}{k}$$

3. Pour les trois affirmations suivantes, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit d la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1 \\ z = -t \end{cases}$, $t \in R$.

Soit d' la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2t'-1 \\ y = -t'+2 \\ z = t'+1 \end{cases}$, $t' \in R$.

Soit P le plan d'équation cartésienne : $2x + y - 2z + 18 = 0$.

Soit A le point de coordonnées $(-1 ; -3 ; 2)$ et B le point de coordonnées $(-5 ; -5 ; 6)$.

On appelle plan médiateur du segment [AB] le plan passant par le milieu du segment [AB] et orthogonal à la droite (AB).

Affirmation 3 : Le point A appartient à la droite d.

Affirmation 4 : Les droites d et d' sont sécantes.

Affirmation 5 : Le plan P est le plan médiateur du segment [AB].

85 Métropole - Jour 1 Remplacement (25-MATJ1ME3)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

MARDI 9 SEPTEMBRE 2025

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1 : (5 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + 0{,}4y = \mathrm{e}^{-0{,}4t}$$

où y est une fonction de la variable réelle t.

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur **R** qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur **R** par : $u(t) = t\mathrm{e}^{-0{,}4t}$

Vérifier que u est solution de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur **R**.

On note g la fonction définie sur **R** par : $g(t) = f(t) - u(t)$

Soit (H) l'équation différentielle $y' + 0{,}4y = 0$

a. Démontrer que si la fonction g est solution de l'équation différentielle (H) alors la fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

On admettra que la réciproque est vraie.

b. Résoudre l'équation différentielle (H).

c. En déduire les solutions de (E).

d. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.

Partie B

On s'intéresse à la glycémie chez une personne venant de prendre un repas.

La glycémie en g.L^{-1}, en fonction du temps t, exprimé en heure, écoulé depuis la fin du repas, est modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par :

$$f(t) = (t + 1)\mathrm{e}^{-0,4t}$$

1. **a**. Montrer que, pour tout $t \in [0\,;6]$, $f'(t) = (-0,4t + 0,6)\mathrm{e}^{-0,4t}$.

b. Étudier les variations de f sur $[0\,;6]$ puis dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

2. Une personne est en hypoglycémie lorsque sa glycémie est inférieure à $0,7$ g.L^{-1}.

a. Démontrer que sur l'intervalle $[0\,;6]$ l'équation $f(t) = 0,7$ admet une unique solution que l'on notera α.

b. Au bout de combien de temps après avoir pris son repas cette personne est-elle en hypoglycémie ?

On exprimera ce temps à la minute près.

3. On souhaite déterminer la glycémie moyenne en g.L^{-1} chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = -23,75\mathrm{e}^{-2,4} + 8,75$$

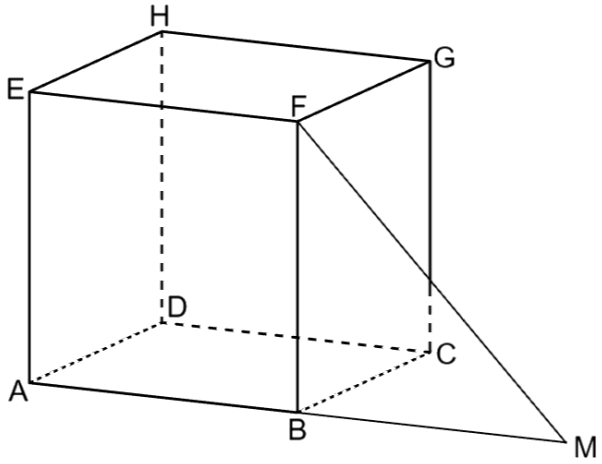
b. Calculer la glycémie moyenne en g.L^{-1} chez cette personne lors des six heures qui suivent le repas.

c. En remarquant que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E), expliquer comment on aurait pu obtenir ce résultat autrement.

Exercice 2 : (5 points)

On considère le cube $\mathrm{ABCDEFGH}$.

On place le point M tel que $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.



Partie A

1. Montrer que les droites (FG) et (FM) sont perpendiculaires.

2. Montrer que les points $\mathrm{A}, \mathrm{M}, \mathrm{G}$ et H sont coplanaires.

Partie B

On se place dans le repère orthonormé $(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{GM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ et montrer qu'ils ne sont pas colinéaires.

2. **a**. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (GM) est :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbf{R}.$$

b. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (AH) est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = k \\ z = k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbf{R}.$$

Montrer que le point d'intersection de (GM) et (AH), que l'on nommera N, a pour coordonnées $(0\,;2\,;2)$.

3. **a**. Montrer que le triangle AMN est un triangle rectangle en A.

b. Calculer l'aire de ce triangle.

4. Soit J le centre de la face BCGF.

a. Déterminer les coordonnées du point J.

b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{FJ}}$ est un vecteur normal au plan (AMN).

c. Montrer que J appartient au plan (AMN). En déduire qu'il est le projeté orthogonal du point F sur le plan (AMN).

5. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre ou d'une pyramide est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h,$$

$\mathcal{B}$ étant l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.
Montrer que le volume du tétraèdre AMNF est le double du volume de la pyramide BCGFM.

Exercice 3 : (6 points)

Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[2\,;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x-2}$.

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

x	2	$+\infty$
$f(x)$	2 ↗	$+\infty$

On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On appelle ℓ la limite de (u_n).
On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x) = x$.
Déterminer la valeur de ℓ.

4. On considère la fonction rang écrite ci-dessous en langage Python.
On rappelle que sqrt(x) renvoie la racine carrée du nombre x.

```
1 from math import *
2
3 def rang(a):
4     u = 6
5     n = 0
6     while u >= a:
7         u = sqrt(3*u - 2)
8         n = n + 1
9     return n
```

a. Pourquoi peut-on affirmer que rang(2.000001) renvoie une valeur ?

b. Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction rang(a) renvoie-t-elle un résultat ?

Partie B

On admet que la suite (v_n) vérifiant $v_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $v_{n+1} = 3 - \frac{2}{v_n}$ est bien définie.

1. Calculer v_1.

2. Pour tout n entier naturel, on admet que $v_n \neq 2$ et on pose :

$$w_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$$

a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2 et préciser son premier terme w_0.

b. On admet que, pour tout n entier naturel,

$$w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2}$$

En déduire que, pour tout n entier naturel,

$$v_n = 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}$$

c. Calculer la limite de (v_n).

3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $v_n < 2{,}01$ en résolvant l'inéquation.

Partie C

À l'aide des parties précédentes, déterminer le plus petit entier N tel que pour tout $n \geq N$, les termes v_n et u_n appartiennent à l'intervalle $]1{,}99\,;\,2{,}01[$.

Exercice 4 : (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Un musée propose des visites avec ou sans audioguide. Les billets peuvent être achetés en ligne ou directement au guichet.

1. Lorsqu'une personne achète son billet en ligne, un code de validation lui est envoyé par SMS afin qu'elle confirme son achat. Ce code est généré de façon aléatoire et est constitué de 4 chiffres deux à deux distincts, le premier chiffre étant différent de 0.

Affirmation 1 : Le nombre de codes différents pouvant être générés est 5040.

2. Une étude a permis de considérer que :

- la probabilité qu'une personne choisisse l'audioguide sachant qu'elle a acheté son billet en ligne est égale à $0{,}8$;
- la probabilité qu'une personne achète son billet en ligne est égale à $0{,}7$;
- la probabilité qu'une personne opte pour une visite sans audioguide est égale à $0{,}32$.

Affirmation 2 : La probabilité qu'un visiteur ne prenne pas l'audioguide sachant qu'il a acheté son billet au guichet est supérieure à deux tiers.

3. On choisit au hasard 12 visiteurs de ce musée.
On suppose que le choix de l'option « audioguide » est indépendant d'un visiteur à l'autre.

Affirmation 3 : La probabilité qu'exactement la moitié de ces visiteurs opte pour l'audioguide est égale à $924 \times 0{,}2176^6$.

4. Lorsqu'une personne dispose d'un audioguide, elle peut choisir parmi trois parcours :

- un premier d'une durée de cinquante minutes,
- un deuxième d'une durée d'une heure et vingt minutes,
- un troisième d'une durée d'une heure et quarante minutes.

Le temps de parcours peut être modélisé par une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	50 min	1 h 20 min	1 h 40 min
$P(X = x_i)$	0,1	0,6	0,3

Affirmation 4 : L'espérance de X est 77 minutes.

86 Asie - Jour 2 Remplacement (25-MATPE4)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : **4 heures**
Coefficient : 16

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Tous les exercices doivent être traités.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidates et les candidats sont invités à faire figurer sur leurs copies toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse.

Exercice 1 **(5 points)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$.
On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$ et on note f' la dérivée de la fonction f.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan.

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1. Pour tout réel x, on a $f'(x) = (-2x + 1)\mathrm{e}^{-2x}$.

Affirmation 2. La fonction f est une solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle $y' + 2y = \mathrm{e}^{-2x}$.

Affirmation 3. La fonction f est convexe sur $]-\infty ; 1]$.

Affirmation 4. L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbf{R}$.

Affirmation 5. L'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $\frac{1}{4} - \frac{3\mathrm{e}^{-2}}{4}$.

Exercice 2 **(5 points)**

« Dans un triangle non équilatéral, la droite d'Euler est la droite qui passe par les trois points suivants :

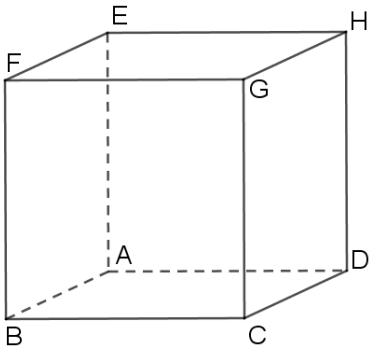
- *le centre du cercle circonscrit à ce triangle (cercle passant par les trois sommets de ce triangle).*
- *le centre de gravité de ce triangle situé à l'intersection des médianes de ce triangle.*
- *l'orthocentre de ce triangle situé à l'intersection des hauteurs de ce triangle ».*

Le but de l'exercice est d'étudier un exemple de droite d'Euler.

On considère un cube ABCDEFGH de côté une unité.

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$.

On note I le milieu du segment [AB] et J le milieu du segment [BG].



1. Donner sans justification les coordonnées des points A, B, G, I et J.

2.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AJ).

b) Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IG) est : $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbf{R}$.

c) Démontrer que les droites (AJ) et (IG) sont sécantes en un point S de coordonnées S $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$.

3.

a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\ (0;-1;1)$ est normal au plan (ABG).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABG).

c) On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (*d*) de vecteur directeur $\vec{n}$ et passant par le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;0\ ;1\right)$ est : $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbf{R}$.

Montrer que cette droite (*d*) coupe le plan (ABG) en un point L de coordonnées L $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$.

d) Montrer que le point L est équidistant des points A, B et G.

4. Montrer que le triangle ABG est rectangle en B.

5.

a) Identifier le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre du triangle ABG (aucune justification n'est attendue).

b) Vérifier par un calcul que ces trois points sont effectivement alignés.

Exercice 3 (4,75 points)

Dominique répond à un QCM comportant 10 questions.

Pour chaque question, il est proposé 4 réponses dont une seule est exacte.

Dominique répond au hasard à chacune des 10 questions en cochant, pour chaque question, exactement une case parmi les 4.

Pour chacune des questions, la probabilité qu'il réponde correctement est donc $\frac{1}{4}$.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses à ce QCM.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X et donner les paramètres de cette loi.

2. Quelle est la probabilité que Dominique obtienne exactement 5 bonnes réponses ?
Arrondir le résultat à 10^{-4} près.

3. Donner l'espérance de X et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On suppose dans cette question qu'une bonne réponse rapporte un point et qu'une mauvaise réponse fait perdre 0,5 point. La note finale peut donc être négative.

On note Y la variable aléatoire qui donne le nombre de points obtenus.

a. Calculer $P(Y = 10)$, on donnera la valeur exacte du résultat.

b. À partir de combien de bonnes réponses la note finale de Dominique est-elle positive ? Justifier.

c. Calculer $P(Y \leq 0)$, on donnera une valeur approchée au centième.

d. Montrer que $Y = 1{,}5X - 5$.

e. Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.

Exercice 4 **(5,25 points)**

Soit n un entier naturel non nul.
Dans le cadre d'une expérience aléatoire, on considère une suite d'évènements A_n et on note p_n la probabilité de l'évènement A_n.

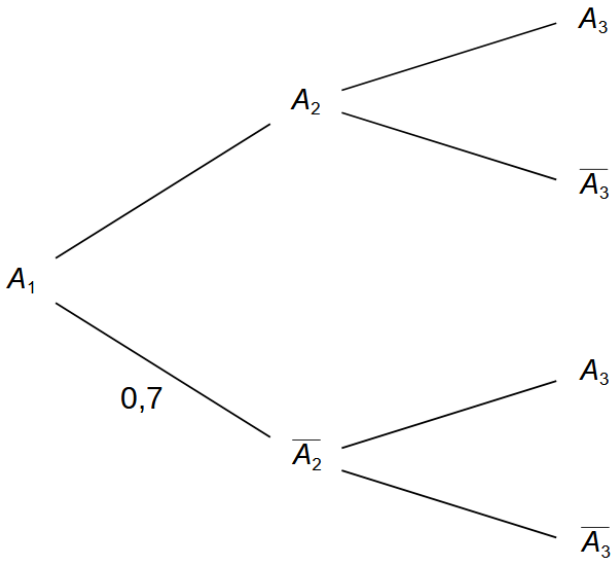
Pour les parties A et B de l'exercice, on considère que :

- Si l'événement A_n est réalisé alors l'événement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,3 .
- Si l'événement A_n n'est pas réalisé alors l'événement A_{n+1} est réalisé avec une probabilité 0,7 .

On suppose que $p_1 = 1$.

Partie A :

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :



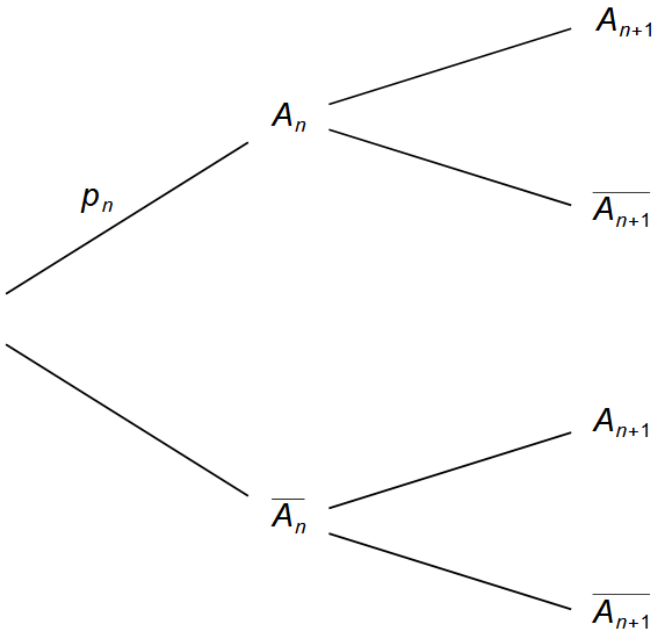
2. Montrer que $p_3 = 0,58$.

3. Calculer la probabilité conditionnelle $P_{A_3}(A_2)$, arrondir le résultat à 10^{-2} près.

Partie B :

Dans cette partie, on étudie la suite (p_n) avec $n \geq 1$.

1. Recopier et compléter les probabilités sur les branches de l'arbre des probabilités ci-dessous :



2.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = -0{,}4\,p_n + 0{,}7$.

On considère la suite (u_n), définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0{,}5$.

b. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. En déduire l'expression de u_n , puis de p_n en fonction de n .

d. Déterminer la limite de la suite (p_n).

Partie C

Soit $x \in]\,0\,;\,1\,[$, on suppose que $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P_{A_n}\left(\overline{A_{n+1}}\right) = x$. On rappelle que $p_1 = 1$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = (1 - 2x)p_n + x$.

2. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier naturel n non nul :

$$p_n = \frac{1}{2}(1 - 2x)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

3. Montrer que la suite (p_n) est convergente et donner sa limite.

87 Métropole - Jour 2 Remplacement (25-MATJ2ME3)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

MERCREDI 10 SEPTEMBRE 2025

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

Exercice 1 : (6 points)

El Niño est un phénomène océanique à grande échelle du Pacifique équatorial qui affecte le régime des vents, la température de la mer et les précipitations sur l'ensemble du globe. Certaines années, ce phénomène est dit « dominant ». Les scientifiques cherchent à modéliser l'apparition de ce phénomène.

Dans cet exercice, les parties A et B sont indépendantes.

Partie A - Premier modèle

À partir d'un échantillon de données, on considère une première modélisation :
- chaque année, la probabilité que le phénomène El Niño soit dominant est égale à $0{,}4$;
- la survenue du phénomène El Niño se fait de façon indépendante d'une année sur l'autre.

On note X la variable aléatoire qui, sur une période de 10 ans, associe le nombre d'années où El Niño est dominant.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

2. **a.** Calculer la probabilité que, sur une période de 10 ans, le phénomène El Niño soit dominant exactement 2 années.

b. Calculer $P(X \leq 2)$. Que signifie ce résultat dans le contexte de l'exercice ?

3. Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.

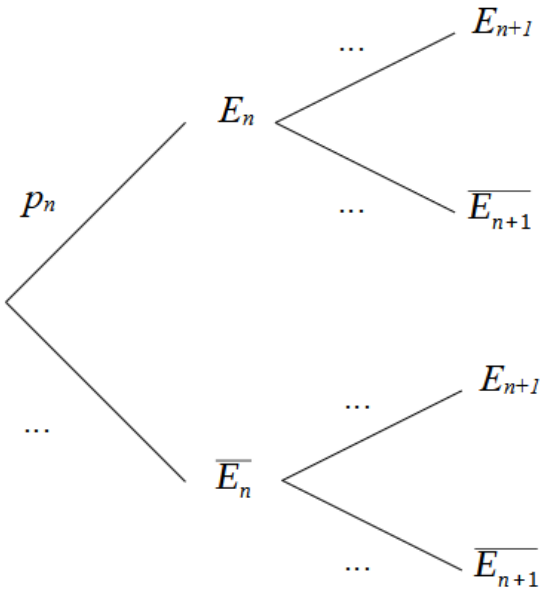
Partie B - Second modèle

Après une étude d'un recueil de données plus important sur les 50 dernières années, une autre modélisation apparait plus pertinente :
- si le phénomène El Niño est dominant une année, alors la probabilité qu'il le soit encore l'année suivante est $0{,}5$
- par contre, si le phénomène El Niño n'est pas dominant une année, alors la probabilité qu'il soit dominant l'année suivante est $0{,}3$.

On considère que l'année de référence est 2023.
On note pour tout entier naturel n :
- E_n l'événement « le phénomène El Niño est dominant l'année $2023 + n$ » ;
- p_n la probabilité de l'événement E_n.

En 2023, El Niño n'était pas dominant. On a ainsi $p_0 = 0$.

1. Soit n un entier naturel. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Justifier que $p_1 = 0{,}3$.

3. En vous aidant de l'arbre, montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}3$$

On cherche à prévoir l'évolution de l'apparition du phénomène El Niño.

4. **a.** Conjecturer les variations et la limite éventuelle de la suite (p_n).

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $p_n \leq \frac{3}{8}$.

c. Déterminer le sens de variation de la suite (p_n).

d. En déduire la convergence de la suite (p_n).

On cherche à déterminer la limite de la suite (p_n).

5. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = p_n - \frac{3}{8}$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison $0{,}2$ et préciser son premier terme.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $p_n = \frac{3}{8}(1 - 0{,}2^n)$.

c. Calculer la limite de la suite (p_n).

d. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 2 : (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est juste ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Dans une classe de 24 élèves, il y a 14 filles et 10 garçons.

Affirmation 1 :

Il est possible de constituer 272 groupes différents de quatre élèves composés de deux filles et deux garçons.

2. Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = 3\sin(2x + \pi)$ et C sa courbe représentative dans un repère donné.

Affirmation 2 :

Une équation de la tangente à C au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est $y = 6x - 3\pi$.

3. On considère la fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = (2x + 1)\ln(x)$.

Affirmation 3 :

La fonction F est une primitive de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x}$.

4. On considère la fonction g définie sur **R** par $g(t) = 45\mathrm{e}^{0,06t} + 20$.

Affirmation 4 :

La fonction g est l'unique solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0{,}06y = 1{,}2$ vérifiant $g(0) = 65$.

5. On considère l'équation différentielle :

$$(E_2) : \; y' - y \; = \; 3\mathrm{e}^{0,4x}$$

où y est une fonction positive de la variable réelle x, définie et dérivable sur **R** et y' la fonction dérivée de la fonction y.

Affirmation 5 :

Les solutions de l'équation (E_2) sont des fonctions convexes sur **R**.

Exercice 3 : (4 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;8]$ par

$$f(x) = \frac{10\ln(-x^2+7x+9)}{x}$$

Soit C_f la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A

1. Résoudre dans **R** l'inéquation $-x^2+7x+8 \geq 0$.
2. En déduire que pour tout $x \in\ ]0\,;8]$, on a $f(x) \geq 0$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

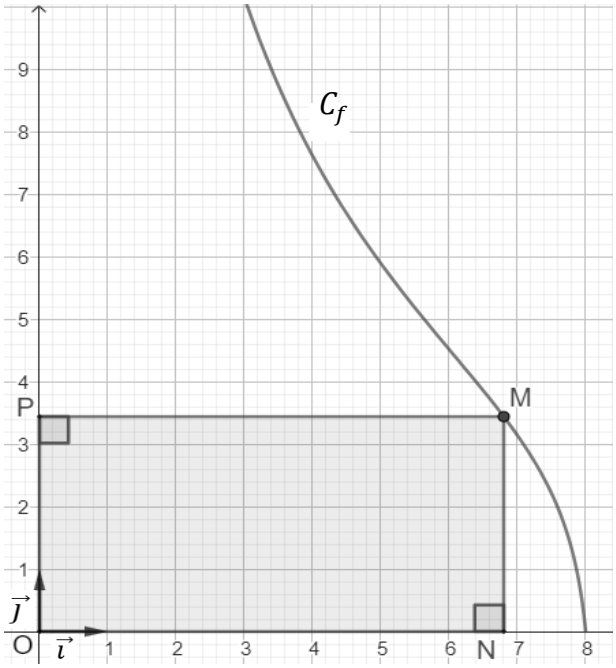
Partie B

La courbe C_f est représentée ci-dessous.

Soit M le point de C_f d'abscisse x avec $x \in]0\,;8]$.

On appelle N et P les projetés orthogonaux du point M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'aire $A(x)$ du rectangle ONMP.



1. Donner les coordonnées des points N et P en fonction de x.
2. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;8]$,

$$A(x) = 10\ln(-x^2+7x+9)$$

3. Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire du rectangle ONMP est maximale ? Si elle existe, déterminer cette position.

Partie C

On considère un réel strictement positif k.
On souhaite déterminer la plus petite valeur de x, approchée au dixième, appartenant à $[3{,}5\,;8]$ pour laquelle l'aire $A(x)$ devient inférieure ou égale à k.
Pour ce faire, on considère l'algorithme ci-dessous.
Pour rappel, en langage Python, $\ln(x)$ s'écrit log(x).

```
1  from math import *
2
3  def A(x):
4      return 10*log(-1 * x**2 + 7*x + 9)
5
6  def pluspetitevaleur(k):
7      x = 3.5
8      while A(x).............:
9          x = x + 0.1
10     return .............
```

1. Recopier et compléter les lignes 8 et 10 de l'algorithme.
2. Quel nombre renvoie alors l'instruction pluspetitevaleur(30) ?
3. Que se passe-t-il lorsque $k = 35$? Justifier.

Exercice 4 : (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère les points $\mathrm{A}(4\,;\,-1\,;\,3)$, $\mathrm{B}(-1\,;\,1\,;\,-2)$, $\mathrm{C}(0\,;\,4\,;\,5)$ et $\mathrm{D}(-3\,;\,-4\,;\,6)$.

1. **a.** Vérifier que les points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ ne sont pas alignés.

On admet qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $29x + 30y - 17z = 35$.

b. Les points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ sont-ils coplanaires ? Justifier.

On admet que lorsque quatre points ne sont pas coplanaires, il existe un unique point situé à égale distance de ces quatre points.
L'objectif de cet exercice est de déterminer le point H se situant à égale distance des quatre points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$.

On définit le plan médiateur d'un segment comme le plan passant par le milieu de ce segment et orthogonal à la droite portant ce segment. C'est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

2. Soit P_1 le plan médiateur du segment $[\mathrm{AB}]$.

a. Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[\mathrm{AB}]$.

b. En déduire qu'une équation cartésienne de P_1 est : $5x - 2y + 5z = 10$.

3. On note P_2 le plan médiateur du segment $[\mathrm{CD}]$.

a. Soit M un point du plan P_2 de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$.
Exprimer MC^2 et MD^2 en fonction des coordonnées de M.
En déduire qu'une équation cartésienne du plan P_2 est : $-3x - 8y + z = 10$.

b . Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

4. Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -2 - 1{,}9t \\ y = t \\ z = 4 + 2{,}3t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbf{R}$$

Démontrer que Δ est la droite d'intersection de P_1 et P_2.

On note P_3 le plan médiateur du segment $[\mathrm{AC}]$.
On admet qu'une équation cartésienne du plan P_3 est : $8x - 10y - 4z = -15$.

5. Démontrer que la droite Δ et le plan P_3 sont sécants.

6. Justifier que le point d'intersection entre Δ et P_3 est le point H.

88 Amérique du Sud - Jour 1 (25-MATJ1AS1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVES D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6 avec quatre exercices indépendants.

Le candidat traite les 4 exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 – 4 points

Un étudiant mange tous les jours au restaurant universitaire. Ce restaurant propose des plats végétariens et des plats non végétariens.

- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,9.
- Lorsqu'un jour donné l'étudiant a choisi un plat non végétarien, la probabilité qu'il choisisse un plat végétarien le lendemain est 0,7.

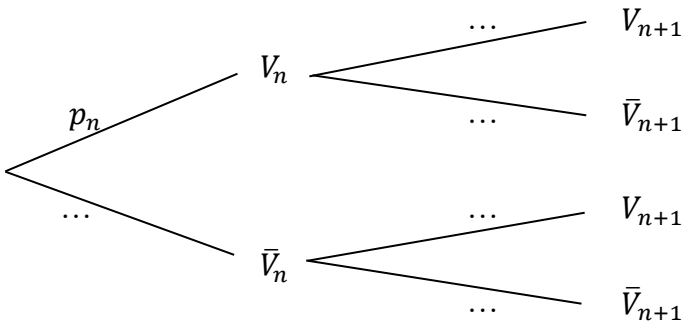
Pour tout entier naturel n, on note V_n l'évènement « l'étudiant a choisi un plat végétarien le $n^{\text{ième}}$ jour » et p_n la probabilité de V_n.
Le jour de la rentrée, l'étudiant a choisi le plat végétarien. On a donc $p_1 = 1$.

1. **a.** Indiquer la valeur de p_2.

b. Montrer que $p_3 = 0{,}88$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

c. Sachant que le 3e jour l'étudiant a choisi un plat végétarien, quelle est la probabilité qu'il ait choisi un plat non végétarien le jour précédent ? On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}7$.

4. On souhaite disposer de la liste des premiers termes de la suite (p_n) pour $n \geq 1$.
Pour cela, on utilise une fonction appelée `repas` programmée en langage Python dont on propose trois versions, indiquées ci-dessous.

Programme 1

```
1 def repas(n):
2   p=1
3   L=[p]
4   for k in range(1,n):
5     p = 0.2*p+0.7
6     L.append(p)
7   return(L)
```

Programme 2

```
1 def repas(n):
2   p=1
3   L=[p]
4   for k in range(1,n+1):
5     p = 0.2*p+0.7
6     L.append(p)
7   return(L)
```

Programme 3

```
1 def repas(n):
2   p=1
3   L=[p]
4   for k in range(1,n):
5     p = 0.2*p+0.7
6     L.append(p+1)
7   return(L)
```

a. Lequel de ces programmes permet d'afficher les n premiers termes de la suite (p_n) ? Aucune justification n'est attendue.

b. Avec le programme choisi à la question **a.** donner le résultat affiché pour $n = 5$.

5. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_n = 0{,}125 \times 0{,}2^{n-1} + 0{,}875$.

6. En déduire la limite de la suite (p_n).

EXERCICE 2 – 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Deux équipes de footballeurs de 22 et 25 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match. Chaque joueur d'une équipe serre une seule fois la main de chaque joueur de l'autre équipe.

Affirmation 1
47 poignées de mains ont été échangées.

2. Une course oppose 18 concurrents. On récompense indistinctement les trois premiers en offrant le même prix à chacun.

Affirmation 3
Il y a 4896 possibilités de distribuer ces prix.

3. Une association organise une compétition de course de haies qui permettra d'établir un podium (le podium est constitué des trois meilleurs sportifs classés dans leur ordre d'arrivée). Sept sportifs participent au tournoi. Jacques est l'un d'entre eux.

Affirmation 2
Il y a 90 podiums différents dont Jacques fait partie.

4. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires de même loi donnée par le tableau ci-dessous :

x_i	-2	-1	2	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,4	0,3	0,2

On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et on considère Y la variable aléatoire somme de ces deux variables aléatoires.

Affirmation 4
$P(Y = 4) = 0{,}25$.

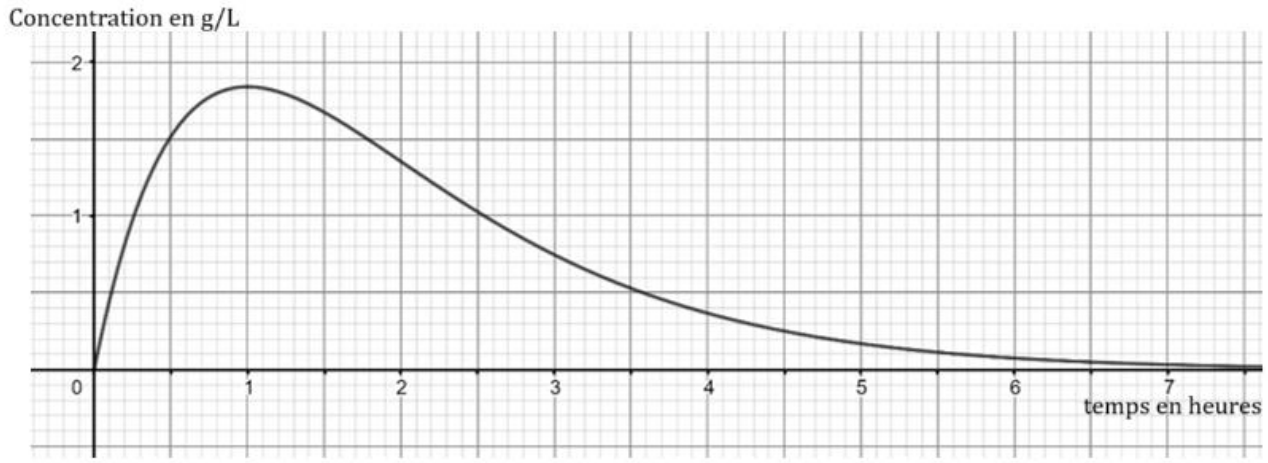
5. Un nageur s'entraîne dans l'objectif de parcourir le 50 mètres nage libre en moins de 25 secondes. Au fil des entraînements, il s'avère que la probabilité qu'il y parvienne s'établit à 0,85.
Il effectue, sur une journée, 20 parcours chronométrés sur 50 mètres. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où il nage cette distance en moins de 25 secondes lors de cette journée.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}85$.

Affirmation 5
Sachant qu'il a atteint au moins 15 fois son objectif, une valeur approchée à 10^{-3} de la probabilité qu'il l'ait atteint au moins 18 fois est $0{,}434$.

EXERCICE 3 – 6 points

On se propose d'étudier la concentration dans le sang d'un médicament ingéré par une personne pour la première fois. Soit t le temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion de ce médicament. On admet que la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre de sang, est modélisée par une fonction f de la variable t définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Partie A : lectures graphiques



On a représenté ci-dessus la courbe représentative de la fonction f.
Avec la précision permise par le graphique, donner sans justification :

1. Le temps écoulé depuis l'instant de l'ingestion de ce médicament et l'instant où la concentration de médicament dans le sang est maximale selon ce modèle.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \geq 1$.
3. La convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

Partie B : détermination de la fonction f

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + y = 5\mathrm{e}^{-t}$, d'inconnue y, où y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

On admet que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

1. Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' + y = 0$.
2. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $u(t) = at\mathrm{e}^{-t}$ avec $a \in \mathbf{R}$.
   Déterminer la valeur du réel a telle que la fonction u soit solution de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. La personne n'ayant pas pris ce médicament auparavant, on admet que $f(0) = 0$.
   Déterminer l'expression de la fonction f.

Partie C : étude de la fonction f

Dans cette partie, on admet que f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 5t\mathrm{e}^{-t}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation complet.

3. Démontrer qu'il existe deux réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 1$.
On donnera une valeur approchée à 10^{-2} des réels t_1 et t_2.

4. Pour une concentration du médicament supérieure ou égale à 1 gramme par litre de sang, il y a un risque de somnolence.
Quelle est la durée en heures et minutes du risque de somnolence lors de la prise de ce médicament ?

Partie D : concentration moyenne

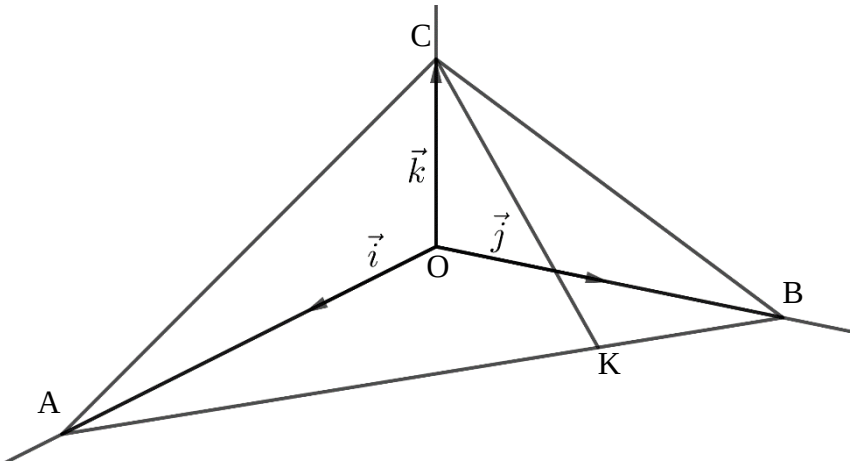
La concentration moyenne du médicament (en gramme par litre de sang) durant la première heure est donnée par :

$$T_m = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

où f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 5t\mathrm{e}^{-t}$.

Calculer cette concentration moyenne.
On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à $0{,}01$ près.

EXERCICE 4 – 5 points



L'espace est muni d'un repère orthonormé $(0\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$.

On considère les points $A(2\sqrt{3}\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$, $C(0\,;0\,;1)$ et $K\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{3}{2}\,;0\right)$.

1. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (CK) est :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{3}{2}t \\ z = -t+1 \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

2. Soit $M(t)$ un point de la droite (CK) paramétrée par un réel t.
Établir que $OM(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$.

3. Soit f la fonction définie et dérivable sur **R** par $f(t) = OM(t)$.

a. Étudier les variations de la fonction f sur **R**.

b. En déduire la valeur de t pour laquelle f atteint son minimum.

4. En déduire que le point $H\left(\frac{\sqrt{3}}{8}\,;\,\frac{3}{8}\,;\,\frac{3}{4}\right)$ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK).

5. Démontrer, à l'aide de l'outil produit scalaire, que le point H est l'orthocentre (*intersection des hauteurs d'un triangle*) du triangle ABC.

6. **a.** Démontrer que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).

b. En déduire une équation du plan (ABC).

7. Calculer, en unité d'aire, l'aire du triangle ABC.

89 Amérique du Sud - Jour 2 (25-MATJ2AS1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVES D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que le sujet est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5 avec quatre exercices indépendants.

Le candidat traite les 4 exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.

EXERCICE 1 – 6 points

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près en cas de besoin. Les deux parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie A

Au tennis, le joueur qui est au service peut, en cas d'échec lors du premier service, servir une deuxième balle.
En match, Abel réussit son premier service dans 70 % des cas. Lorsque le premier service est réussi, il gagne le point dans 80 % des cas. En revanche, après un échec à son premier service, Abel gagne le point dans 45 % des cas.
Abel est au service. On considère les événements suivants :

- S : « Abel réussit son premier service »
- G : « Abel gagne le point ».

1. Décrire l'évènement $\overline{\text{S}}$ puis traduire la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer $P(\text{S} \cap \text{G})$.

3. Justifier que la probabilité de l'évènement G est égale à $0{,}695$.

4. Abel a gagné le point. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi son premier service ?

5. Les évènements S et G sont-ils indépendants ? Justifier.

Partie B

À la sortie d'une usine de fabrication de balles de tennis, une balle est jugée conforme dans 85 % des cas.

1. On teste successivement 20 balles. On considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées.

   a. Quelle est la loi suivie par X et quels sont ses paramètres ? Justifier.
   b. Calculer $P(X \leq 18)$.
   c. Quelle est la probabilité qu'au moins deux balles ne soient pas conformes parmi les 20 balles testées ?
   d. Déterminer l'espérance de X.

2. On teste maintenant n balles successivement. On considère les n tests comme un échantillon de n variables aléatoires X_i indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $0{,}85$.
On considère la variable aléatoire

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \frac{X_3}{n} + \cdots + \frac{X_n}{n}$$

   a. Déterminer l'espérance et la variance de M_n.
   b. Après avoir rappelé l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour tout entier naturel n, $P(0{,}75 < M_n < 0{,}95) \geq 1 - \frac{12{,}75}{n}$.
   c. En déduire un entier n tel que la moyenne du nombre de balles conformes pour un échantillon de taille n appartienne à l'intervalle $]0{,}75\ ;\ 0{,}95[$ avec une probabilité supérieure à 0,9.

EXERCICE 2 – 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans toutes les questions suivantes, l'espace est rapporté à un repère orthonormé.

1. On considère la droite Δ_1 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = t \end{cases}$, où $t \in \mathbf{R}$,

ainsi que la droite Δ_2 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4 + s \\ y = 2 + 2s \\ z = -1 + s \end{cases}$, où $s \in \mathbf{R}$.

a. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles.
b. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont orthogonales.
c. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont sécantes.

2. On considère la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, où $t \in \mathbf{R}$,

et le plan P d'équation cartésienne : $4x + 2y - z + 3 = 0$.

a. La droite d est incluse dans le plan P.
b. La droite d est parallèle strictement au plan P.
c. La droite d est sécante au plan P.

3. On considère les points $A(3\ ;\ 2\ ;\ 1)$, $B(7\ ;\ 3\ ;\ 1)$, $C(-1\ ;\ 4\ ;\ 5)$ et $D(-3\ ;\ 3\ ;\ 5)$.

a. Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
b. Les points A, B et C sont alignés.
c. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

4. On considère les plans Q et Q' d'équation cartésienne respective $3x - 2y + z + 1 = 0$ et $4x + y - z + 3 = 0$.

a. Le point $R(1\ ;\ 1\ ;-2)$ appartient aux deux plans.
b. Les deux plans sont orthogonaux.
c. Les deux plans sont sécants avec pour intersection la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 7t + 4 \\ z = 11t + 7 \end{cases}$, où $t \in \mathbf{R}$.

EXERCICE 3 – (4 points)

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} v_0 = \ln(4) \\ v_{n+1} = \ln(-1 + 2e^{v_n}) \end{cases} \text{ et } \qquad w_n = -1 + e^{v_n}.$$

On admet que la suite (v_n) est bien définie et strictement positive.

1. Donner les valeurs exactes de v_1 et w_0.

2. **a.** Une partie d'une feuille de calcul où figurent les indices et les termes des suites (v_n) et (w_n) est reproduite ci-contre. Parmi les trois formules ci-dessous, choisir la formule qui, saisie dans la cellule B3 puis recopiée vers le bas, permettra d'obtenir les valeurs de la suite (v_n) dans la colonne B.

	A	B	C
1	n	v_n	w_n
2	0	1,38629436	3
3	1	1,94591015	6
4	2	2,56494936	12
5	3	3,21887582	24
6	4	3,8918203	48
7	5	4,57471098	96
8	6	5,26269019	192
9	7	5,95324333	384
10	8	6,64509097	768
11	9	7,33758774	1536
12	10	8,03040956	3072
13	11	8,72339402	6144
14	12	9,41645983	12288
15	13	10,1095663	24576
16	14	10,8026932	49152
17	15	11,4958302	98304
18	16	12,1889723	196608
19	17	12,8821169	393216

Formule 1	$\text{LN}(-1 + 2 * \text{EXP}(\text{B2}))$
Formule 2	$= \text{LN}(-1 + 2 * \text{EXP}(\text{B2}))$
Formule 3	$= \text{LN}(-1 + 2 * \text{EXP}(\text{A2}))$

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (v_n).

c. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, valider votre conjecture concernant le sens de variation de la suite (v_n).

3. **a.** Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n = \ln(1 + 3 \times 2^n)$.

c. Déterminer la limite de la suite (v_n).

4. Justifier que l'algorithme suivant écrit en langage *Python* renvoie un résultat quel que soit le choix de la valeur du nombre S.

```
from math import*
def seuil(S):
    V=ln(4)
    n=0
    while V < S :
        n=n+1
        V=ln(2*exp(V)-1)
    return(n)
```

EXERCICE 4 – 6 points

Partie A : dénombrement

On considère l'ensemble des nombres entiers relatifs **non nuls** compris entre -30 et 30 ; cet ensemble peut l'écrire ainsi : $\{-30\,;\,-29\,;\,-28\,;\,\ldots -1\,;\,1\,;\,\ldots;\,28\,;29\,;30\}$. Il comporte 60 éléments.
On choisit dans cet ensemble successivement et sans remise un entier relatif a puis un entier relatif c.

1. Combien de couples $(a\,;c)$ différents peut-on ainsi obtenir ?

On considère l'évènement M : « l'équation $ax^2 + 2x + c = 0$ possède deux solutions réelles distinctes », où a et c sont les entiers relatifs précédemment choisis.

2. Montrer que l'évènement M a lieu si et seulement si $ac < 1$.

3. Expliquer pourquoi l'évènement contraire $\overline{\text{M}}$ comporte 1740 issues.

4. Quelle est la probabilité de l'évènement M ? On arrondira le résultat à 10^{-2}.

Partie B : équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 10y = (30x^2 + 22x - 8)\text{e}^{-5x+1}$ avec $x \in$ **R** où y est une fonction définie et dérivable sur **R.**

1. Résoudre sur **R** l'équation différentielle : $y' + 10y = 0$.

2. Soit la fonction f définie sur **R** par $f(x) = (6x^2 + 2x - 2)\text{e}^{-5x+1}$. On admet que f est dérivable sur **R** et on note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Justifier que f est une solution particulière de (E).

3. Donner l'expression de toutes les solutions de (E).

Partie C : étude de fonction

On propose d'étudier dans cette partie la fonction f rencontrée à la question partie **B.2** On rappelle que, pour tout réel x, $f(x) = (6x^2 + 2x - 2)\text{e}^{-5x+1}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

2. En utilisant la partie **A**, montrer que $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points (*les coordonnées de ces points ne sont pas attendues*).

3. En utilisant les parties **A** et **B**, montrer que $\mathcal{C}_f$ possède deux tangentes horizontales.

4. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f.

5. Déterminer en justifiant le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 1$.

6. Pour tout réel m strictement supérieur à 0,2, on définit I_m par $I_m = \int_{0,2}^{m} f(x)\,\text{d}x$.
   a. Vérifier que la fonction F définie sur **R** par $F(x) = \left(-\frac{6}{5}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{28}{125}\right)\text{e}^{-5x+1}$ est une primitive de la fonction f sur **R**.
   b. Existe-t-il une valeur de m pour laquelle $I_m = 0$? Interpréter graphiquement ce résultat.

90 Nouvelle-Calédonie - Jour 1 (25-MATJ1NC1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

JOUR 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

La qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

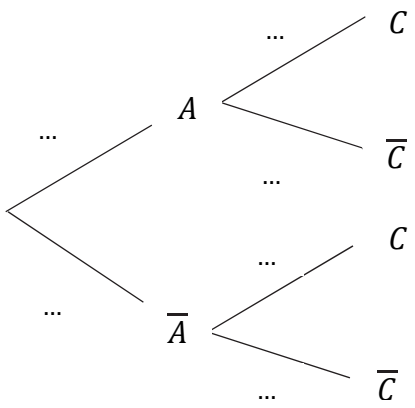
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Exercice 1 (5 points)

On dispose d'un sac et de deux urnes A et B.
Le sac contient 4 boules : 1 boule avec la lettre A et 3 boules avec la lettre B.
L'urne A contient 5 billets : 3 billets de 50 euros et 2 billets de 10 euros.
L'urne B contient 4 billets : 1 billet de 50 euros et 3 billets de 10 euros.

Un joueur prend au hasard une boule dans le sac.
Si c'est une boule avec la lettre A, il prend au hasard un billet dans l'urne A.
Si c'est une boule avec la lettre B, il prend au hasard un billet dans l'urne B.

On note les évènements suivants :
A : « le joueur obtient une boule avec la lettre A » ;
C : « le joueur obtient un billet de 50 euros ».



1. Recopier et compléter l'arbre ci-contre représentant la situation.

2. Quelle est la probabilité de l'évènement : « *Le joueur obtient une boule avec la lettre A et un billet de* 50 *euros* » ?

3. Démontrer que la probabilité $P(C)$ est égale à $0{,}3375$.

4. Le joueur a obtenu un billet de 10 euros.
L'affirmation « *Il y a plus de* 80% *de chances qu'il ait au préalable obtenu une boule avec la lettre B* » est-elle vraie ? Justifier.

5. On note X_1 la variable aléatoire qui donne la somme, en euros, obtenue par le joueur. Exemple : si le joueur obtient un billet de 50 euros, on a $X_1 = 50$.

Montrer que l'espérance $E(X_1)$ est égale à $23{,}5$ et que la variance $V(X_1)$ est égale à $357{,}75$.

6. Après avoir remis la boule dans le sac et le billet dans l'urne où il a été pris, le joueur joue une deuxième partie. On note X_2 la variable aléatoire qui donne la somme obtenue par le joueur lors de cette deuxième partie.
On note Y la variable aléatoire ainsi définie : $Y = X_1 + X_2$.

a. Montrer que $E(Y) = 47$.

b. Expliquer pourquoi on a $V(Y) = V(X_1) + V(X_2)$.

7. Le joueur joue de même une troisième, une quatrième, …, une centième partie.
On définit donc de la même façon les variables aléatoires X_3, X_4, …., X_{100}.
On note Z la variable aléatoire définie par $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$.

Démontrer que la probabilité que Z appartienne à l'intervalle $]1950\,;2750[$ est supérieure ou égale à $0{,}75$.

Exercice 2 (4 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(4;-4;4),\ B(5;-3;2),\ C(6;-2;3) \text{ et } D(5;1;1).$$

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B.

2. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$x - y - 8 = 0\,.$$

3. On note d la droite passant par le point D et orthogonale au plan (ABC).

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

b. On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
Déterminer les coordonnées du point H.

c. Montrer que $DH = 2\sqrt{2}$.

4. a. Montrer que le volume de la pyramide $ABCD$ est égal à 2.

On rappelle que le volume V d'une pyramide se calcule à l'aide de la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h\,,$$

où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base de la pyramide et h la hauteur correspondante.

b. On admet que l'aire du triangle BCD est égale à $\frac{\sqrt{42}}{2}$.
En déduire la valeur exacte de la distance du point A au plan (BCD).

Exercice 3 (6 points)

On considère n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{1-x}\,.$$

On admet que la fonction f_n est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$ et on note f_n' sa fonction dérivée.

Partie A

Dans cette partie on étudie le cas où $n = 1$.
On étudie donc la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{1-x}.$$

1. Montrer que $f_1'(x)$ est strictement positif pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1[$.

2. En déduire le tableau de variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0\,;1]$.

3. En déduire que l'équation $f_1(x) = 0{,}1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;1]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{1-x}\mathrm{d}x\,.$$

On admet que $u_1 = \mathrm{e} - 2$.

1. a. Justifier que pour tout $x \in [0\,;1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq x^{n+1} \leq x^n\,.$$

b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n\,.$$

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2. a. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

b. On considère le script Python ci-dessous définissant la fonction `suite()`.

```
from math import exp

def suite() :
    u= …
    for n in range (1,…):
       u= …
    return
```

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction `suite()` renvoie la valeur de $\int_0^1 x^8 \mathrm{e}^{1-x} \mathrm{d}x$.

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_n \leq \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 (5 points)

*Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse**, en **justifiant** la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.*

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - x^2.$$

Affirmation 1 : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $-2y' + 3y = \sin(x) + 8\cos(x)$.

On considère la fonction f définie sur **R** par :

$$f(x) = 2\cos(x) - \sin(x)\,.$$

Affirmation 2 : La fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

3. On considère la fonction g, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(3x+1) + 8\,.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 25$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = g(u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est strictement positive.

Affirmation 3 : La suite (u_n) est décroissante.

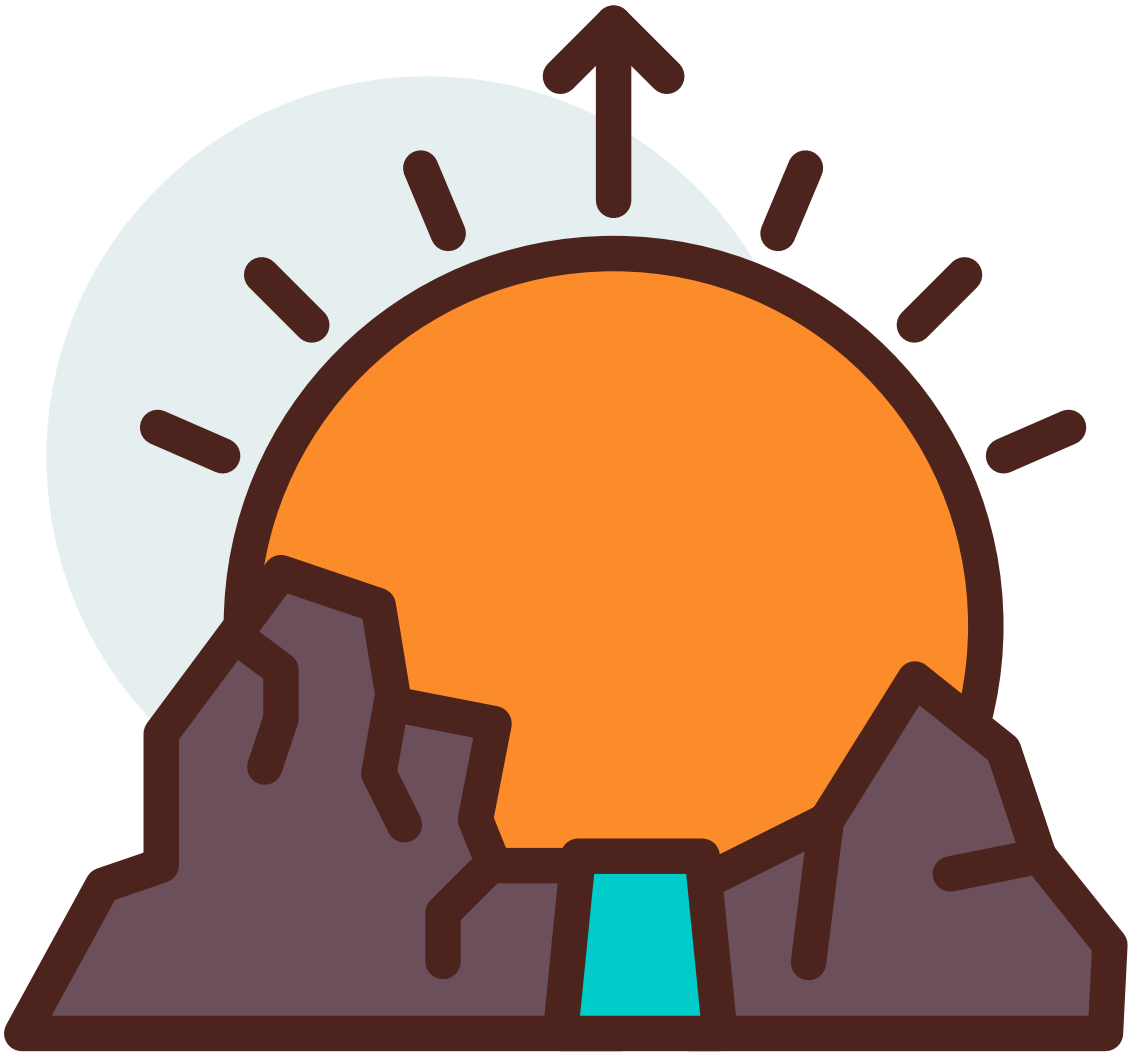
4. On considère une fonction affine h définie sur **R**.
On note k la fonction définie sur **R** par $k(x) = x^4 + x^2 + h(x)$.

Affirmation 4 : La fonction k est convexe sur **R**.

5. Une anagramme d'un mot est le résultat d'une permutation des lettres de ce mot.
Exemple : le mot BAC possède 6 anagrammes : BAC, BCA, ABC, ACB, CAB, CBA.

Affirmation 5 : Le mot EULER possède 120 anagrammes.

91 Nouvelle-Calédonie - Jour 2 (25-MATJ2NC1)



BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

JOUR 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

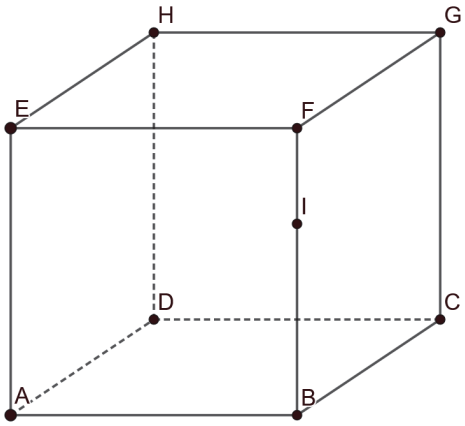
La qualité de rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.



On considère un cube $\mathrm{ABCDEFGH}$ d'arête 1 et le point I défini par $\overrightarrow{\mathrm{FI}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{FB}}$.
On pourra se placer dans le repère orthonormé de l'espace $(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

1. On considère le triangle HAC.

Affirmation 1 : Le triangle HAC est un triangle rectangle.

2. On considère les droites (HF) et (DI).

Affirmation 2 : Les droites (HF) et (DI) sont sécantes.

3. On considère un réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;\pi[$.

On considère le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \sin(\pi-\alpha) \\ \sin(-\alpha) \end{pmatrix}$.

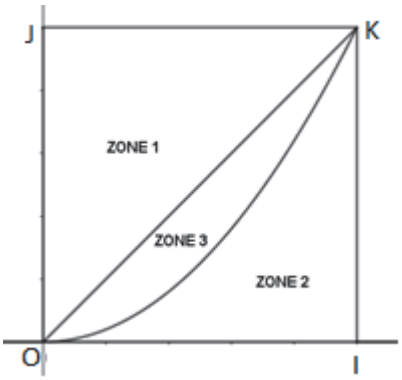
Affirmation 3 : Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (FAC).

4. Le cube $\mathrm{ABCDEFGH}$ possède 8 sommets. On s'intéresse au nombre N de segments que l'on peut construire en reliant 2 sommets distincts quelconques du cube.

Affirmation 4 : $N = \dfrac{8^2}{2}$.

Exercice 2 (6 points)

Dans le repère orthonormé (O ; I, J) ci-contre, on a représenté :
- la droite d'équation $y = x$;
- la droite d'équation $y = 1$;
- la droite d'équation $x = 1$;
- la parabole d'équation $y = x^2$.



On peut ainsi partager le carré OIKJ en trois zones.

Les parties B et C peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

Démontrer les résultats figurant dans le tableau ci-dessous.

ZONE	ZONE 1	ZONE 2	ZONE 3
AIRE	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Partie B : un premier jeu.

Un joueur lance une fléchette sur le carré ci-dessus. On admet que la probabilité qu'elle tombe sur une zone est égale à l'aire de cette zone. Ainsi, la probabilité que la fléchette tombe sur la ZONE 3 est égale à $\frac{1}{6}$.

- Si la fléchette tombe sur la ZONE 3, alors le joueur lance une pièce équilibrée. Si la pièce tombe sur PILE, alors le joueur gagne, sinon il perd.
- Si la fléchette tombe sur une autre zone que la ZONE 3, alors le joueur lance un dé équilibré à six faces. Si le dé tombe sur la FACE 6, alors le joueur gagne, sinon il perd.

On note les évènements suivants :

T : « la fléchette tombe sur la ZONE 3 » ;

G : « le joueur gagne ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Démontrer que la probabilité de l'évènement G est égale à $\frac{2}{9}$.

3. On sait que le joueur a gagné. Quelle est la probabilité que la fléchette soit tombée sur la ZONE 3 ?

Partie C : un second jeu.

Un joueur, appelé joueur n°1, lance une fléchette sur le carré précédent. Comme dans la partie B, on admet que la probabilité que la fléchette tombe sur chacune des zones est égale à l'aire de cette zone.

Le joueur gagne une somme égale, en euros, au numéro de la zone. Par exemple, si la fléchette tombe sur la ZONE **3**, le joueur gagne **3** euros.

On note X_1 la variable aléatoire donnant le gain du joueur n°1.
On note respectivement $E(X_1)$ et $V(X_1)$ l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_1.

1. a. Calculer $E(X_1)$.

b. Montrer que $V(X_1) = \frac{5}{9}$.

2. Un joueur n°2 et un joueur n°3 jouent à leur tour, dans les mêmes conditions que le joueur n°1. On admet que les parties de ces trois joueurs sont indépendantes les unes des autres.
On note X_2 et X_3 les variables aléatoires donnant les gains des joueurs n°2 et n°3.
On note Y la variable aléatoire définie par $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

a. Déterminer la probabilité que l'on ait $Y = 9$.

b. Calculer $E(Y)$.

c. Justifier que $V(Y) = \frac{5}{3}$.

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 2\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \ln(9)$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = f(u_n)\,.$$

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $f(2\ln(2)) = 2\ln(2)$.

3. Montrer que $u_1 = \ln(5)$.

4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a :

$$2\ln(2) \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

5. En déduire que la suite (u_n) converge.

6. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $X^2 - X - 2 = 0$.

b. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 2 = 0\,.$$

c. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = x$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} + 1\,.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
En déduire les éventuelles asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$.

2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}\,.$$

3. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

4. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Donner un encadrement du réel α d'amplitude $0{,}01$.

c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x).$$

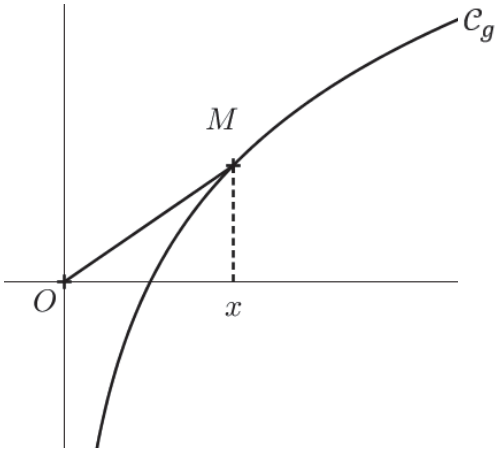
On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé d'origine O. On considère un réel x strictement positif et le point M de la courbe $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x. On note OM la distance entre les points O et M.

a. Exprimer la quantité OM^2 en fonction du réel x.

b. Montrer que, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, la quantité OM^2 admet un minimum en α.

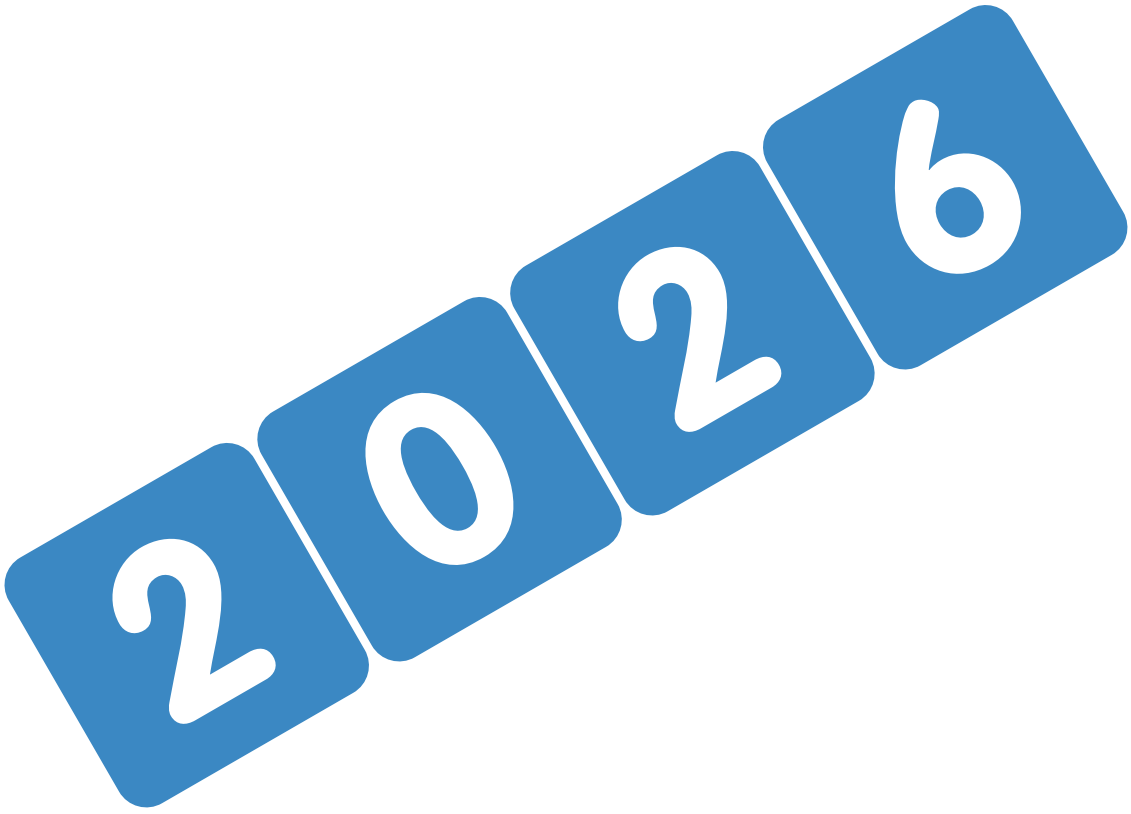
c. La valeur minimale de la distance OM, lorsque le réel x parcourt l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, est appelée *distance du point O à la courbe $\mathcal{C}_g$*.
On note d cette distance.

Exprimer d à l'aide de α.



Sixième partie

Session 2026



92 Amérique du Nord - Jour 1 (26-MATJ1AN1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Jour 1

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9.

Le sujet est constitué de quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (6 points)

Une plateforme de diffusion musicale propose trois types d'abonnements : « Étudiant », « Classique » et « Famille ». Elle propose également une option « Écoute hors-ligne » qu'on peut activer pour chaque type d'abonnement et qui permet de télécharger de la musique.

Une étude statistique menée sur les abonnés a permis d'établir que :

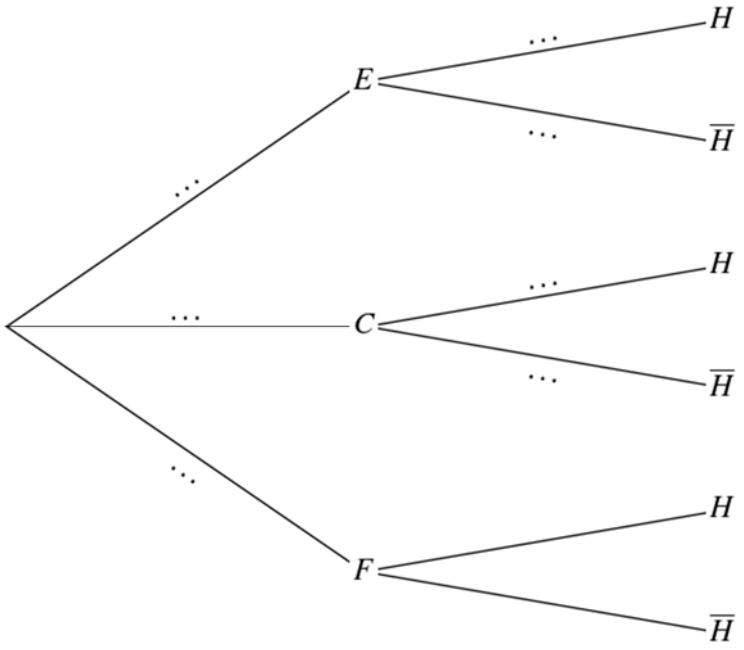
- 25 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Étudiant » et 15 % ont choisi l'abonnement « Famille » ;
- 45 % des abonnés « Étudiant » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 30 % des abonnés « Classique » ont activé l'option « Écoute hors-ligne » ;
- 12 % des abonnés ont choisi l'abonnement « Famille » et ont activé l'option « Écoute hors-ligne ».

On prélève au hasard le profil d'un abonné et on considère les événements suivants :

- E : l'abonné a choisi l'abonnement « Étudiant » ;
- C : l'abonné a choisi l'abonnement « Classique » ;
- F : l'abonné a choisi l'abonnement « Famille » ;
- H : l'abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ».

Partie A

1. Recopier l'arbre de probabilités suivant, en complétant les pointillés :



2. Calculer la valeur exacte de $P\,(E \cap H)$.

3. Démontrer que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de $0{,}4125$.

4. Un abonné a activé l'option « Écoute hors-ligne ». Déterminer la probabilité qu'il ait choisi l'abonnement « Étudiant ». *On arrondira le résultat au millième.*

Partie B

On choisit huit abonnés de cette plateforme, au hasard et de manière indépendante. On considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour que ce choix soit assimilé à un tirage avec remise.
On rappelle que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « Écoute hors-ligne » est de $0{,}4125$.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'abonnés ayant activé l'option « Écoute hors-ligne ».

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option « Écoute hors-ligne ». *On arrondira le résultat au millième.*

3. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.
   On s'intéresse à un échantillon de n abonnés, qu'on assimile à un tirage avec remise.
   On note q_n la probabilité qu'au moins un abonné de cet échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne ».
   a. Démontrer que, pour tout n entier naturel non nul, $q_n = 1 - 0{,}5875^n$.
   b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un abonné de l'échantillon ait activé l'option « Écoute hors-ligne » soit supérieure ou égale à $99{,}9$ %.

Partie C

La plateforme propose les tarifs mensuels suivants :

- Abonnement « Étudiant » : 5 € par mois ;
- Abonnement « Classique » : 10 € par mois ;
- Abonnement « Famille » : 16 € par mois ;
- Option « Écoute hors-ligne » : 2 euros de plus par mois quel que soit l'abonnement choisi.

On note Y la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné.

1. Donner les six valeurs possibles prises par la variable aléatoire Y.

2. Dresser le tableau décrivant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

3. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y vaut $10{,}475$ et interpréter ce résultat dans le contexte.

4. À l'aide de la calculatrice, donner la variance de la variable aléatoire Y, arrondie au centième.

5. Une plateforme vidéo propose les mêmes types d'abonnements. On note Z la variable aléatoire égale au montant payé mensuellement par un abonné à cette plateforme vidéo.
   On admet que l'espérance de la variable aléatoire Z vaut 9 et son écart-type 2.

   a. Calculer la variance de la variable aléatoire Z.
   b. Un responsable affirme que si on interroge un abonné de cette plateforme vidéo au hasard, il y a au moins 50 % de chances pour que le prix de son abonnement soit strictement compris entre 6 et 12 euros.
      Justifier cette affirmation.

EXERCICE 2 (4 points)

La perche-soleil est une espèce de poisson envahissante. Un plan de lutte contre la prolifération de cette espèce est mis en place et on étudie dans cet exercice deux modèles d'évolution de la population de perches-soleil dans un étang naturel. On estime que, dans cet étang, le nombre de perches-soleil s'élève à $4\,000$ individus au 1er janvier 2025.

Partie A : étude d'un modèle discret

Dans cette partie, on modélise le nombre de perches-soleil dans l'étang par une suite (u_n). Pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de perches-soleil, exprimé en millier, dans l'étang au 1er janvier de l'année $2025 + n$.
La suite (u_n) est définie par :

- $u_0 = 4$.
- pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n}$.

On admet que cette suite est bien définie et qu'en particulier pour tout entier n, $u_n > 0$.

1. Calculer le nombre de perches-soleil au 1er janvier 2026 donnée par ce modèle.

2. On note h la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = 4 - \frac{4}{x}$.
   a. Justifier que la fonction h est croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n :
   $$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 4.$$
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
   d. Justifier que $\ell = 2$.
   e. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

3. On considère le script Python ci-dessous.
   a. Soit s un réel appartenant à l'intervalle $]2; 4[$.
   Recopier et compléter ce script de sorte qu'il renvoie, après exécution, le plus petit entier n tel que $u_n < s$.

```
def population(s) :
    u=4
    n=0
    while … :
        u= …
        n= …
    return n
```

   b. Quelle valeur renvoie la commande `population(2.2)` ?
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B : étude d'un modèle continu

On note t le temps écoulé, exprimé en année, à partir du 1er janvier 2025. L'évolution du nombre de perches-soleil, exprimé en millier, est modélisée par la fonction p telle que :

- la fonction p est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$;
- $p(0) = 4$;
- la fonction p est solution de l'équation différentielle (E) $y' + y = 2$ où y est une fonction de la variable réelle t.

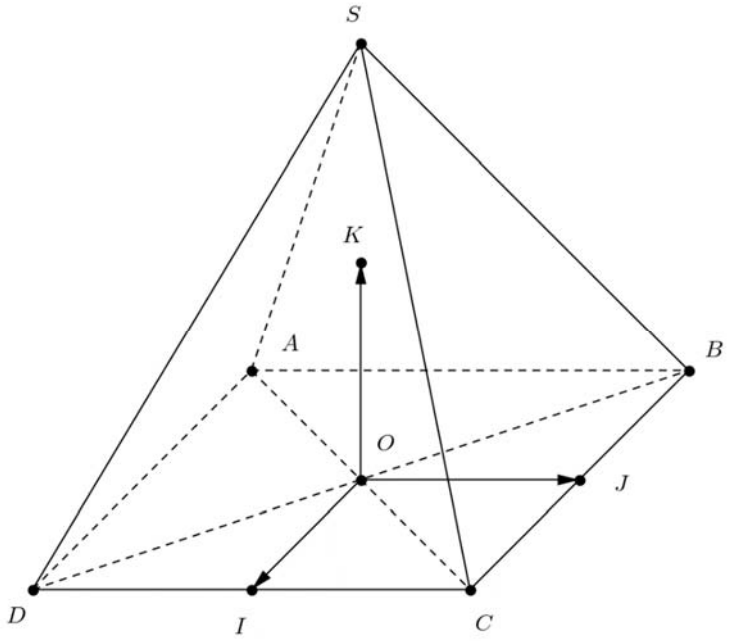
1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E).

2. En déduire que l'expression de la fonction p sur l'intervalle $[0; +\infty[$ est $p(t) = 2\mathrm{e}^{-t} + 2$.

3. Ce modèle prévoit-il une élimination à long terme de l'espèce envahissante ?

EXERCICE 3 (5 points)

Dans cet exercice l'unité est le cm.
On considère une pyramide à base carrée $SABCD$ comme dans la figure ci-dessous.



Dans cette figure :

- $AB = BC = CD = DA = OS = 2$ cm
- I est le milieu de $[CD]$, J le milieu de $[BC]$ et K le milieu de $[OS]$.

L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$.
On admet que $B(-1; 1; 0)$, $C(1; 1; 0)$, et $S(0; 0; 2)$.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Donner les coordonnées des points A et D.

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB}$.

3. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{BSC}$ arrondie au dixième de degré près.

Partie B

On se propose dans cette partie de déterminer la distance du point O au plan (SBC).

1. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a. Justifier que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (SBC).
   b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (SBC) est $2y + z - 2 = 0$.

2. On note H le projeté orthogonal du point O sur le plan (SBC).

   a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (OH) est
   $$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 2t \\ z &= t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$
   b. Calculer les coordonnées du point H.

   c. En déduire que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

Partie C

On se propose ici de retrouver le résultat de la **partie B** par une autre méthode.

1. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :
   $$V = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}.$$
   a. Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.

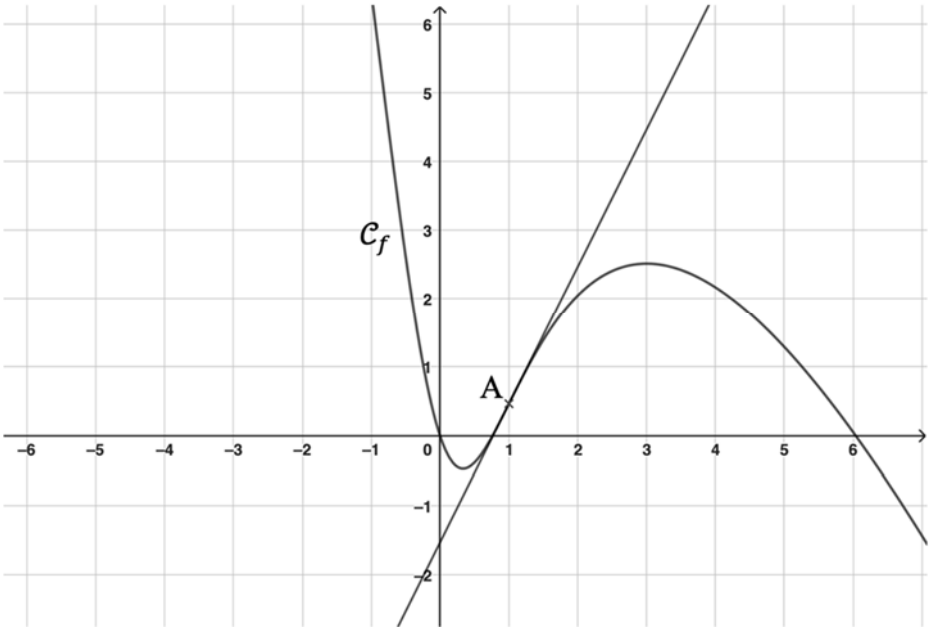
   b. En déduire que le volume de la pyramide $OCBS$ est égal à $\frac{2}{3}$ cm^3.

2. Déterminer l'aire du triangle SBC.

3. Déduire des questions précédentes que la distance du point O au plan (SBC) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ cm.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5\ln(x^2+1) - 3x$ et on admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.



1. Conjecturer, à l'aide de la représentation graphique de la fonction f, les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

2. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $-\infty$.

3. a. Démontrer que, pour tout x réel strictement positif,
$$f(x) = x\left(10\frac{\ln x}{x} - 3\right) + 5\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$
b. Déterminer, en justifiant, la limite de la fonction f en $+\infty$.

4. a. Démontrer que pour tout x réel, $f'(x) = \frac{-3x^2+10x-3}{x^2+1}$.

b. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x,
$$f''(x) = \frac{-10x^2+10}{(x^2+1)^2}.$$

a. Valider ou rejeter la conjecture faite à la question 1.
b. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
c. En déduire que pour tout $x \geq 1$, $\ln(x^2+1) \leq x + \ln(2) - 1$.

93 Amérique du Nord - Jour 2 (26-MATJ2AN1)

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2026

MATHÉMATIQUES

Jour 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Le sujet est constitué de quatre exercices.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 (4 points)

Un supermarché dispose d'un stock de tomates provenant de deux fournisseurs A et B.

Il a été constaté que :
- $91\ \%$ du stock de tomates est commercialisable ;
- $60\ \%$ du stock de tomates provient du fournisseur A ;
- parmi les tomates provenant du fournisseur A, la proportion de tomates commercialisables est de $95\ \%$.

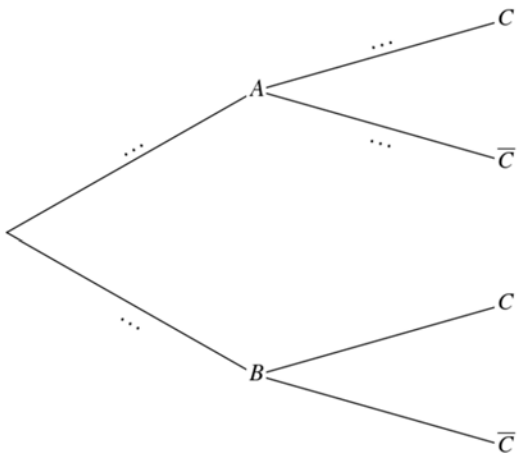
On choisit au hasard une tomate dans le stock.

On désigne par :
- A l'événement « La tomate provient du fournisseur A » ;
- B l'événement « La tomate provient du fournisseur B » ;
- C l'événement « La tomate est commercialisable ».

Pour un événement quelconque E, on note $P(E)$ la probabilité de E.

Partie A

1. Recopier l'arbre ci-dessous en complétant les pointillés.



2. a. Déterminer la probabilité que la tomate choisie soit commercialisable et provienne du fournisseur A.
   b. Démontrer que $P_B(C) = 0{,}85$.
   c. La tomate choisie est non commercialisable. Le responsable des achats estime qu'il y a deux fois moins de chance qu'elle provienne du fournisseur A que du fournisseur B. A-t-il raison ?

Partie B

On rappelle que $9\ \%$ des tomates du stock ne sont pas commercialisables.

1. On prend 15 tomates dans le stock au hasard et de manière indépendante. On considère que le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables dans cet échantillon de 15 tomates.

   a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. En préciser les paramètres.
   b. Déterminer la probabilité qu'exactement deux tomates soient non commercialisables.
      On donnera la valeur arrondie au millième.
   c. Déterminer la probabilité qu'au plus deux tomates soient non commercialisables.
      On donnera la valeur arrondie au millième.

2. On constitue désormais un échantillon de n tomates, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel non nul.
   On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tomates non commercialisables et F_n la variable aléatoire égale à la fréquence de tomates non commercialisables dans cet échantillon de n tomates.
   On a donc $F_n = \frac{X_n}{n}$.
   On admet que la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $0{,}09$.

   a. Calculer l'espérance $E(F_n)$ et exprimer la variance $V(F_n)$ en fonction de n.
   b. Démontrer que $P(0{,}04 < F_n < 0{,}14) \geq 1 - \frac{32{,}76}{n}$.
   c. Le responsable des achats prélève dans le stock un échantillon de 500 tomates. Il s'aperçoit que 55 tomates ne sont pas commercialisables. Est-ce conforme à ce qu'il pouvait attendre ? Justifier la réponse.

Exercice 2 (6 points)

Partie A : étude du sens de variation d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

2. a. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Vérifier que, pour tout réel x, on a $f'(x) = \frac{2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Partie B : étude de la convergence d'une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $1 \leq u_n \leq u_{n+1} < \sqrt{3}$.

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

3. Le but de cette question est de retrouver par une autre méthode les résultats de la question 2. de la **partie B**.

   Pour tout entier naturel n, on pose :

   $$v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2} .$$

   On admet que la suite (v_n) est bien définie.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4 dont on précisera le premier terme.
   b. En déduire une expression de v_n en fonction de n puis que $u_n = \sqrt{\frac{1{,}5\times 4^n}{1+0{,}5\times 4^n}}$ pour tout entier naturel n.
   c. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie C : étude de la convergence de la somme de termes

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_{n-1}^2$.

1. Recopier et compléter le script Python ci-dessous afin que celui-ci permette de lister les p premiers termes de la suite (S_n).

```
from math import*

def termes(p) :
    u=…
    S=0
    L=[]
    for i in range(p) :
        S=…
        u=…
        L.append(S)
    return L
```

Remarque : on rappelle qu'en langage Python,

- la commande `L=[]` crée une liste vide ;
- la commande `L.append(S)` ajoute, à la fin de la liste `L`, l'élément supplémentaire `S`.

2. On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a $1 \leq u_k \leq \sqrt{3}$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a $n \leq S_n \leq 3n$.

3. En déduire les limites respectives de S_n et de $\frac{S_n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
On considère :

- les points $A(4\,;2\,;2)$, $B(5\,;-2\,;3)$ et $C(1\,;1\,;1)$;
- la droite Δ dont une représentation paramétrique est donnée par
$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 1+2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \ ;$$
- le plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et perpendiculaire à la droite Δ.

1. Vérifier que la droite Δ passe par le point $C(1\,;1\,;1)$ mais pas par le point A.

2. a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $2x+y+2z-14=0$.
   b. Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ passe par le point B mais pas par le point C.

3. On considère le point $D(3\,;2\,;3)$.
   a. Démontrer que le point D est le projeté orthogonal du point C sur le plan $\mathcal{P}$.
   b. Justifier que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
   c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.
   d. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.
   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V=\frac{1}{3}\times B\times h$ où B *est l'aire d'une base du tétraèdre et* h *la hauteur relative à cette base*.

4. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).
   a. Vérifier que les coordonnées du point H sont $\left(\frac{73}{29}\ ;\ \frac{-4}{29}\ ;\ \frac{51}{29}\right)$.
   b. Démontrer que l'aire du triangle ABC est $\frac{3\sqrt{22}}{2}$.
   c. En déduire la distance du point D au plan (ABC).

Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x)^2$.
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = x \ln x$.
   a. Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) = 4\left(g(\sqrt{x})\right)^2$.
   b. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

3. Dans cette question, on étudie les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   a. Démontrer que sur l'intervalle $]0;+\infty[$ $f'(x) = (\ln x)(2 + \ln x)$.
   b. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   c. Donner la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $]0;1]$.

4. On considère l'équation $f(x) = 2$.
   a. Justifier que, sur l'intervalle $]0;+\infty[$, cette équation admet une unique solution. On note α cette solution.
   b. Donner un encadrement de α d'amplitude $0{,}1$.

5. Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1]$.
   a. Donner une interprétation géométrique de $\int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que :
   $$\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 - \int_a^1 x \ln x \,\mathrm{d}x .$$
   c. En utilisant à nouveau une intégration par parties, démontrer que :
   $$\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}(\ln a)^2 + \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{1}{4} - \frac{a^2}{4}.$$
   d. Déterminer la limite de $\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x$ quand a tend vers 0.